EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES 1 - SESSION 2009

Alain CHAURÉ
Maitre de Conférences à l'Université de Reims

Remarques générales sur l'épreuve

L'épreuve de Mathématiques 1 de la session 2009 est consacrée à l'étude de la notion de fonction matriciellement croissante. Dans la première partie on étudie les notions de matrices symétriques réelles positives et définies positives, puis on définit sur l'ensemble des matrices symétriques réelles une relation d'ordre. Diverses propriétés de cette relation sont utilisées dans les deux parties suivantes.

Dans la seconde partie, on définit ce qu'est une fonction matriciellement croissante (ou décroissante) et on étudie les exemples de fonctions homographiques et puissances.

La troisième et dernière partie fait appel à une représentation intégrale et permet de montrer que la fonction logarithme népérien et la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in]0,1[$ sont matriciellement croissantes.

Le sujet proposé cette année, de l'avis général des correcteurs, était certainement long, mais la plupart des raisonnements demandés étaient décomposés en de nombreuses sous-questions et beaucoup de résultats étaient formulés dans l'énoncé lui-même, permettant ainsi d'aborder chaque question sans avoir résolu complètement les précédentes. Beaucoup de candidats ont d'ailleurs mis à profit cet ordonnancement du problème.

Toutefois, le niveau global des copies est très décevant : la moyenne générale est de 7,81 sur 20 en PC-CH et 7,87 sur 20 en PC-PH : les progrès attendus par rapport à l'année précédente ne sont pas au rendez-vous.

Deux points importants ont été soulignés par les correcteurs.

1 - Des difficultés de compréhension des notions introduites dans le problème, mais aussi des notions de bases du programme : La relation d'ordre sur les matrices a trop souvent été considérée directement comme une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Ceci fut surtout flagrant aux questions I.8.d) et e) où beaucoup de candidats n'ont pas compris ce qu'il s'agissait de démontrer et le fait que $S_1 \leq S_2$ implique $\alpha S_1 \leq \alpha S_2$ pour tout α réel a été rencontré dans un trop grand nombre de copies.

La définition de fonction matricielle donnée dans l'énoncé a gêné beaucoup de candidats : la question II.4. a été révélatrice à cet égard. Pour certains la matrice $f(S)$ est devenue la matrice de coefficients $f(s_{ij})$, pour d'autres les matrices $g(S)$ et $h(S)$ ont été directement écrites $\dfrac{1}{S}$ et $\dfrac{S}{I_n + S}$! La croissance ou décroissance matricielle a même été étudiée avec l'aide de la dérivée.

Le calcul de $Sf(S)$ à la question II.3.a) a montré qu'après deux années au moins passées en classe préparatoire, un grand nombre de candidats ne sait toujours pas manipuler le symbole Σ pour effectuer des opérations sur des sommes algébriques : le produit de deux sommes a souvent été écrit avec le même indice pour chacune et transformé magiquement sans aucune référence aux règles habituelles du calcul algébrique.

A propos des inverses de matrices , on rencontre l'égalité $(A-B)^{-1} = A^{-1} - B^{-1}$ ou X^{-1} pour X vecteur colonne ; par exemple à la question I.6.a) qui a été en général très mal traitée, on a pu lire : si $MX = \lambda X$, alors $(MX)^{-1} = M^{-1}X^{-1} = \lambda^{-1}X^{-1}$ et donc λ^{-1} est valeur propre de M^{-1}.

Trop souvent on trouve l'argument que si S est diagonalisable, alors dans une certaine base $S = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Lorsque le résultat d'une question n'est pas donné dans l'énoncé, on obtient beaucoup trop fréquemment des réponses dénuées du moindre bon sens. Les deux exemples les plus significatifs sont fournis par les questions II.2.b) et II.3.b). On a ainsi eu droit à :

$$\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i = 0 \ , \ \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i = 1 \ , \ \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ , \ \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i = I_n$$

et pour l'autre question, X est vecteur propre de $f(S)$ pour la valeur propre $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$ par exemple.

De telles erreurs sont inadmissibles à ce niveau et montrent le degré d'incompréhension et l'absence totale de sens critique de leurs auteurs.

2 - Un manque de rigueur et de logique trop fréquent : Dès la toute première question du problème une grande majorité de candidats oublie de montrer que ${}^tMSM$ est symétrique et à la question I.2, on a déjà un large éventail du laxisme dans l'écriture et le raisonnement. Le symbole $\Longleftrightarrow$ est utilisé à tort et à travers sans aucune justification. En général, lorsqu'il s'agit de montrer une équivalence, on procède par double implication : beaucoup semblent l'avoir oublié . Les confusions entre les quantificateurs "quel que soit" et "il existe" ne sont pas rares. La condition X non nul pour pouvoir affirmer que $\lambda||X||^2 \geq 0$ implique $\lambda \geq 0$ a fréquement été oubliée.

Très peu de candidats ont montré correctement que lorsque M est inversible, le spectre de M^{-1} est l'ensemble des inverses des valeurs propres de M. La grande majorité, sans s'en rendre compte, a en réalité seulement montré que l'ensemble des inverses des valeurs propres de M était inclus dans le spectre de M^{-1}. Pour cette question d'ailleurs, la notation $\mathrm{Sp}(M^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{Sp}(M)}$, qui n'a a priori aucun sens, a souvent été rencontrée.

Il est trop fréquent de voir affirmer qu'un vecteur est un vecteur propre sans s'assurer qu'il est non nul ou bien de voir transformer une intégrale convergente en une différence de deux intégrales divergentes.

Remarques plus précises concernant chacune des questions du problème

Partie I

I.1 – La preuve de la symétrie est trop souvent oubliée.

I.2 – La plupart du temps une seule des implications est correctement vérifiée.

I.3 et **I.4** – Questions réussies soit par vérification directe à partir de la définition, soit à l'aide des valeurs propres. Dans quelques cas, le calcul des valeurs propres est faux.

I.5 – Très rares sont les candidats qui justifient que T et S sont orthogonalement semblables, lorsqu'ils utilisent cette propriété. D'autres écrivent d'abord $T = P^{-1}SP$ et en cours de calcul P^{-1} se transforme miraculeusement en ${}^tP$: il faut savoir que ce genre de pratique encourt toujours la peine maximale.

I.6.a – Une matrice inversible n'est pas nécessairement diagonalisable et la double inclusion ou le fait que $(M^{-1})^{-1} = M$ n'est invoqué que par les très bons candidats.

I.6.b – Le caractère symétrique de S^{-1} est très majoritairement oublié.

I.7 – Il ne faut pas croire que si une matrice a toutes ses valeurs propres nulles, alors elle est nulle.

I.8.a,b,c,d,e – Cette question a largement permis de tester le niveau de compréhension et de logique des candidats. On se reportera aux remarques faites précédemment.

I.9 – Question facile et bien traitée

I.10.a,b – La rédaction de ces deux questions illustre bien le manque de rigueur.

I.11.a – Si la positivité est souvent établie, la symétrie est fréquemment oubliée et le caractère défini ne fait pas toujours appel à l'inversibilité de M.

I.11.b – Curieusement, cette question n'est pas toujours comprise.

I.11.c – Souvent bien traitée.

I.12 – Cette question est assez bien réussie, mais une erreur fréquente est d'utiliser la compatibilité de la relation $\leq$ avec la multiplication à gauche ou à droite.

Partie II

II.1.a – Rares sont les candidats qui ont vérifié à la fois l'existence, l'unicité et la symétrie des matrices P_1 et P_2. En général, il manque une ou deux de ces propriétés.

II.1.b – Très majoritairement bien réussie, cette question a fourni beaucoup de points.

II.1.c – La formule du binôme de Newton est trop souvent utilisée sans vérifier que P_1 et P_2 commutent et l'expression de $Q(S)$ est souvent donnée sans démonstration.

II.1.d – Question classique, mais les calculs de déterminants, lorsqu'ils sont utilisés, posent toujours autant de difficultés et sont rarement suffisamment expliqués pour le correcteur.

II.2.a,b – Questions de cours pas toujours bien restituées. Quant à l'expression de la somme directe des sous-espaces propres, des réponses plus farfelues les unes que les autres ont été données, comme il a déjà été signalé plus haut.

II.2.c – Le fait que la base canonique est orthonormée est rarement mentionné pour justifier que la matrice P_i de l'endomorphisme symétrique p_i est elle-même symétrique.

II.2.d – Trop de candidats considèrent que P_i est la matrice de p_i dans la base de vecteurs propres.

II.3.a – Difficultés d'écriture pour les produits de sommes : le même indice est utilisé pour S et $f(S)$.

II.3.b – Question rarement bien traitée et beaucoup trop de résultats farfelus pour la valeur propre demandée.

II.3.c – Beaucoup de candidats écrivent n'importe quoi et oublient ou n'ont pas compris que $\cos(\pi S_0)$ n'est qu'une notation définie au début de la question II.3.

II.4.a,b – Ces questions faciles sont pourtant mal traitées en général. Beaucoup n'ont pas vu que les matrices P_i de S et S^{-1} étaient les mêmes. Certains se contentent de remplacer x par S et vont même jusqu'à dresser des tableaux de variation pour étudier la monotonie matricielle.

II.5.a – Lorsque la question est abordée, elle est en général bien traitée, sauf dans les copies faibles, où l'on rencontre une comparaison terme à terme des coefficients. .

II.5.b – Le calcul des valeurs propres est correct, mais très peu de candidats simpifient $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ sous forme exponentielle.

II.5.c,d – Très rarement réussies et on voit souvent les matrice $A(x)$ et $B(x)$ élevées naïvement à la puissance α au lieu de revenir à la définition de l'énoncé.

II.5.e – Le déterminant est souvent trouvé par ceux qui abordent la question, mais l'équivalent exact est très rare et la conclusion correcte encore plus rare.

Partie III

III.1.a,b – Manque de rigueur général pour ces deux questions. L'expression exacte de ${}^tXA(t)X$ comme somme double est trop rare.

III.2.a – La plupart des candidats se contente exclusivement d'étudier les problèmes de convergence aux deux bornes, sans préciser pourquoi il n'y a que ces deux problèmes et l'hypothèse de signe dans l'application des théorèmes de comparaison d'intégrales est trop rarement citée.

III.2.b – Le théorème sur le changement de variable dans les intégrales impropres (C^1-difféomorphisme) n'est pratiquement jamais cité et la stricte positivité de C est rarement justifiée par un argument correct.

III.2.c,d,e – Ces questions furent rarement abordées, mais ont rapporté beaucoup de points aux quelques candidats qui ont su voir qu'il suffisait d'appliquer les divers résultats obtenus auparavant.

III.3.a – Erreur fréquente : l'intégrale convergente est décomposée en une différence de deux intégrales divergentes et la forme indéterminée disparaît comme elle est arrivée.

III.3.b,c – Questions pratiquement jamais abordées.