MATHEMATIQUES

Rapporteur Monsieur Rémi COUTENS

Déroulement de l'épreuve

Le protocole n'a pas changé et sera le même pour le concours 2009, nous conseillons aux futurs candidats la lecture des rapports 2006 et 2007 dans lesquels ils trouveront des conseils qui ne sont pas repris ici mais qui demeurent valables. Néanmoins rappelons les principaux points :

L'oral de mathématiques dure une heure (une demi-heure de préparation, une demi-heure d'exposé).

Chaque sujet est composé de deux exercices indépendants (l'un orienté algèbre-géométrie, l'autre analyse-géométrie) de durées sensiblement égales.

Les sujets où la calculatrice est interdite sont devenus minoritaires. **Les candidats doivent apporter leur calculatrice**. La calculatrice est utilisée comme outil de calcul : classiquement valeurs approchées, suites récurrentes mais également en algèbre calcul de polynômes caractéristiques, petits calculs matriciels, calcul d'inverse *etc*. On trouvera en annexe de ce rapport deux exemples de planches données en 2008 (on trouvera d'autres exemples dans les rapports précédents).

Après la préparation, le candidat expose les résultats qu'il a obtenus. Même si certains d'entre eux sont incomplets, le candidat doit expliquer les pistes (même infructueuses) qu'il a explorées, les théorèmes du cours s'y rapportant etc.

L'examinateur n'intervient jamais dans le but de déstabiliser le candidat. Quand il le fait, c'est plutôt pour donner une piste lui permettant de reprendre l'initiative.

Signalons que les examinateurs disposent d'un ordinateur pour faire leur compte rendu. Que les candidats se rassurent, le fait de prendre des notes au clavier ne l'empêche pas d'écouter attentivement le candidat.

Sur le concours 2008

Comme en 2007, l'ensemble des exposés est très satisfaisant du point de vue de la forme. La quasi-totalité des candidats expose clairement ses résultats et ses démarches. Rares sont ceux qui marmonnent ou ne parlent qu'au tableau.

Sur le fond, le niveau des candidats est hétérogène mais plutôt satisfaisant dans l'ensemble : les principaux outils et techniques sont acquis (calcul de valeurs propres, diagonalisation, calcul des coefficients de Fourier...).

Toutefois, nous avons constaté parfois quelques faiblesses notamment en géométrie affine entre autres.

Détail de quelques points faibles

- nombres complexes (notamment utilisation en géométrie mais pas seulement) ;
- savoir écrire l'équation cartésienne d'un plan affine de R^3 connaissant un repère et réciproquement ;
- savoir écrire (et reconnaître) une équation de cercle (!) ;
- les résultats sur les coniques, relations entre « e, a, b et c », équation polaire (en revanche curieusement les quadriques semblent mieux acquises) ;
- convergence des séries et des intégrales : concernant les rayons de convergence, on recourt systématiquement à la règle de D'Alembert (directement sur les coefficients ce qui pourtant n'est pas explicitement au programme) du coup la convergence d'une série dont le terme général est du type $u_n\, x^{2n}$ ou tout simplement celle de la série numérique de terme général $1/(n^2+1)$ posent problème ; quant aux intégrales généralisées, bien que les références du cours soient connues, la mise en œuvre des critères de comparaison est rarement effectuée ;
- les hypothèses du théorème de Dirichlet sont souvent oubliées et sa conclusion est rarement bien comprise.

Conclusion

La plus grande partie des candidats a manifestement effectué un travail sérieux lors des années de classe préparatoire. Certains d'entre eux ont réalisé une excellente prestation. Le jury souhaite une excellente préparation et bon courage aux futurs candidats.

Exemple 1

Exercice 1

Soit Γ la courbe de $\mathbf{R}^3$ paramétrée par $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ où les fonctions x, y, z sont les solutions du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = 3\,x(t) - 2\,y(t) + 2\,z(t) \\ y'(t) = y(t) + 2\,z(t) \\ z'(t) = 2\,y(t) + z(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

1. On note $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ la matrice associée au système différentiel considéré.
   Montrer que A est diagonalisable et préciser les sous-espaces propres.
2. Montrer que Γ est incluse dans une droite que l'on précisera.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

On **admet** que l'on peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par la donnée d'une valeur initiale $u_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ et la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Répresenter, dans un même repère orthonormé, la courbe représentative de f et la première bissectrice (c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$).
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite (u_n) est divergente.
3. Ecrire un programme permettant de calculer les cinq premiers termes de la suite à partir de la valeur initiale.
4. Observer ces valeurs pour différentes valeurs de u_0.
   Quelle conjecture peut-on faire ? Prouver cette conjecture.

Exemple 2

Exercice 1

Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$. Soit r la rotation autour de la droite D d'équations $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ et telle que $r(e_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + 2e_2 + e_3)$.

1. Choisir un vecteur directeur de D et donner les valeurs du cosinus et sinus de l'angle (ainsi orienté) de la rotation r.
2. Donner la matrice de r dans la base (e_1, e_2, e_3).

Exercice 2

Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\arctan(xt)}}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x)$ est bien définie et que l'on a :
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{4}.$$
2. Calculer $f(0)$ en justifiant le résultat.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^+$ et décroissante sur $\mathbf{R}^+$.
4. Montrer que l'équation $f(\ell) = \ell$ admet une unique solution positive.