

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet comporte 19 pages dont :

- 16 pages de texte de présentation et énoncé du sujet,
- 1 livret de 3 pages de documents réponses **à rendre obligatoirement avec la copie.**

Toute documentation autre que celle fournie est interdite.

REMARQUES PRELIMINAIRES

Toutes les parties sont globalement indépendantes. Les questions Q26 à Q34 évaluent des compétences en informatique et pèseront pour un quart de la note finale.

Il est conseillé d'utiliser des feuilles de papier brouillon afin de mettre au point les développements mathématiques, schémas, graphes et courbes, avant de les recopier au propre sur la copie à rendre.

Il est demandé au candidat de bien vouloir inscrire les résultats et les développements nécessaires aux différentes questions sur sa copie, **en précisant bien le numéro de la question traitée et, si possible, dans l'ordre des questions.** Les résultats attendus seront obligatoirement encadrés.

Dimensionnement d'une roue autonome pour une implantation sur un fauteuil roulant

I Présentation

I.1 La roue autonome

Ez-Wheel SAS est une entreprise française de technologie innovante fondée en 2009. Elle propose une gamme de roues électriques « clé en main », 100 % intégrées.

La roue autonome ez-Wheel (prononcer « easy-wheel ») propose une solution simple pour tracter des équipements de manutention et de transport de charges, des véhicules légers et matériels médicaux (figure 1). L'avantage de la solution ez-Wheel est d'être adaptable à la majorité des produits roulants qui existent sur le marché. Les dimensions et l'interface mécanique standardisées permettent une installation simple et immédiate. Le stator de la roue ez-Wheel est fixé sur le châssis de l'engin à déplacer et son rotor est assemblé directement sur sa roue.



Figure 1 – Exemples d'implantation de roue autonome

La solution intègre, au sein d'une roue, tous les composants nécessaires à la traction : la motorisation électrique, des batteries haute énergie de très longue durée de vie, un contrôleur de puissance assurant un pilotage optimal et la gestion de la batterie ainsi qu'une interface de commande sans fil. La transmission de l'énergie est réalisée par un variateur (incorporé à la carte de commande), un moteur brushless, puis un réducteur (figure 2, page 3).

Les produits ez-Wheel sont conçus pour un fonctionnement en intérieur ou extérieur sur une large gamme de température. Tous les composants, y compris la batterie, sont dimensionnés pour une durée de vie supérieure à 5 ans et ne nécessitent aucune inspection de maintenance. La technologie ez-Wheel permet de supprimer de l'engin tous les périphériques, câblages et connecteurs, facilitant considérablement l'intégration de la motorisation électrique par rapport aux solutions conventionnelles.

I.2 Mise en situation

Nous nous proposons, dans ce sujet, d'étudier l'implantation de la roue autonome sur un fauteuil roulant (figure 3). Pour ce genre d'application, où il est nécessaire de mettre en place

deux roues autonomes sur le fauteuil, la commande des roues n'est pas aussi simple que pour des applications à une seule roue. En effet, en plus de gérer le mouvement d'avance du fauteuil, il faut également gérer ses changements de direction. Les deux ez-Wheel étant implantées sur chacune des deux roues arrière, le pilotage des deux roues est lié afin de maîtriser la direction du fauteuil. Chacune des deux roues est alors asservie par l'intermédiaire de capteurs mesurant la vitesse de rotation de l'arbre du moteur brushless.

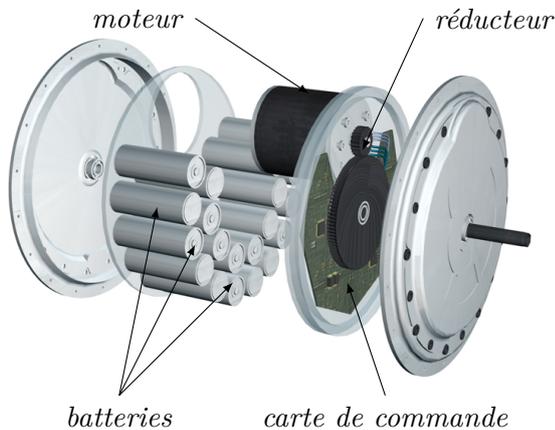


Figure 2 – Principaux éléments d'une roue ez-Wheel

Figure 3 – Prototype de fauteuil roulant équipé de deux ez-Wheel

II Architecture et fonctionnement global du système

Les figures 4 (page 3) et 5 (page 4), présentent un extrait du cahier des charges dans la phase de vie d'utilisation du fauteuil. La figure 6 (page 5) présente le diagramme partiel des blocs internes du fauteuil motorisée.

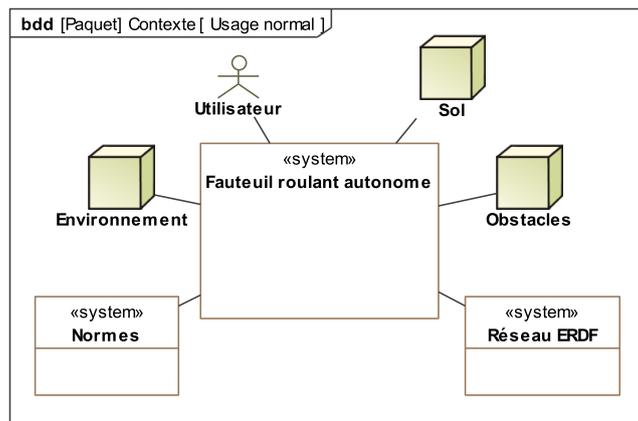


Figure 4 – Diagramme de contexte en utilisation normale du fauteuil roulant équipé de deux ez-Wheel

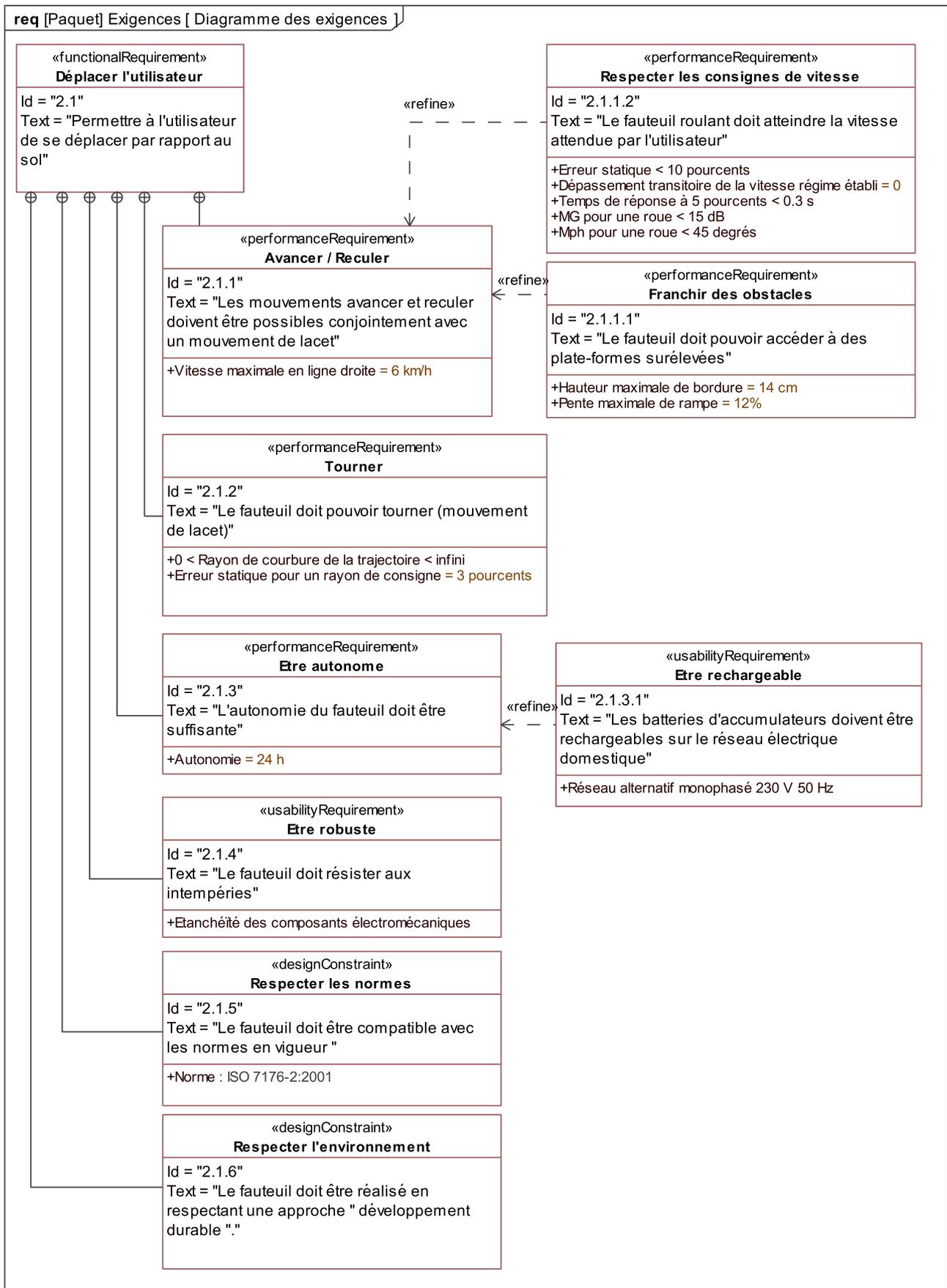


Figure 5 – Diagramme des exigences

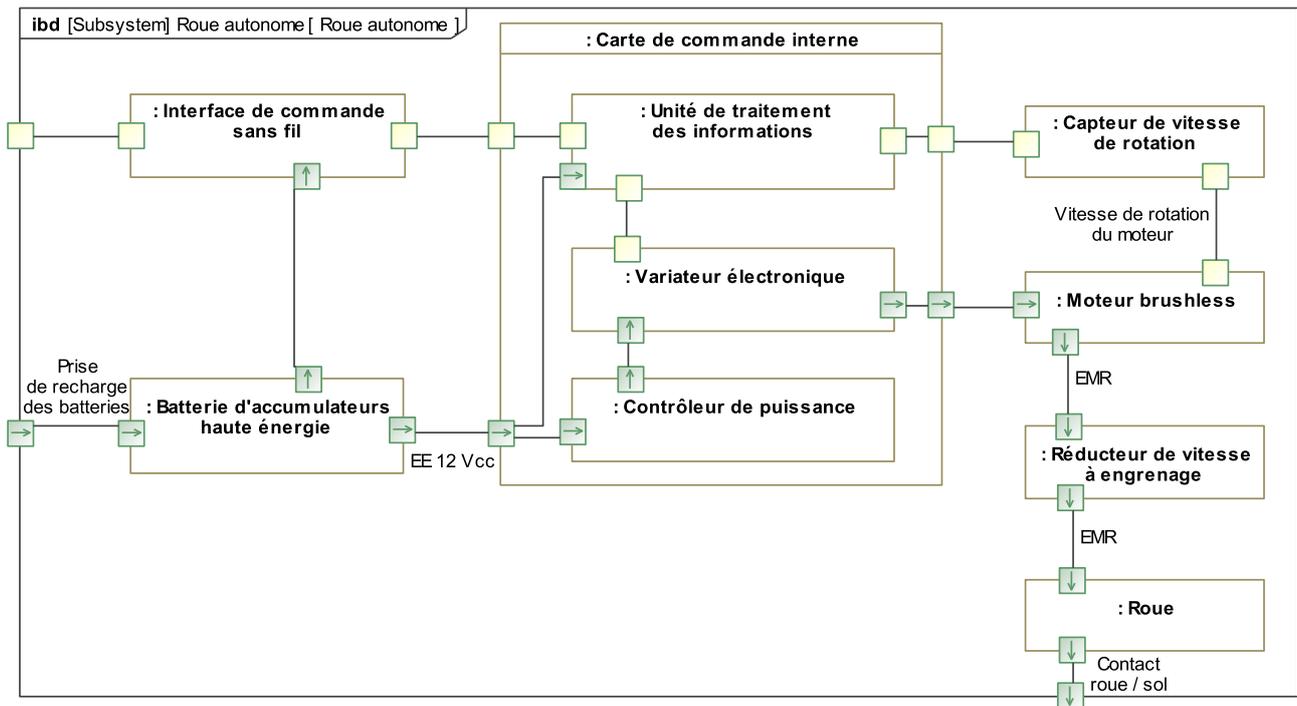


Figure 6 – Diagramme des blocs internes partiel du fauteuil motorisé

Q1. À partir du diagramme de la figure 6 (page 5), déterminer les composants qui interviennent dans la chaîne d'énergie du fauteuil motorisé.

Q2. Quelle exigence principale nécessite l'utilisation de capteurs de vitesse de rotation ?

Un capteur de présence, noté cs , permet de détecter la présence d'une personne assise sur le siège ($cs = 1$) ou si le siège est vide ($cs = 0$). Le joystick de commande possède deux boutons poussoirs ON et OFF de variables binaires associées respectives on et off . Le niveau de batteries est connu à chaque instant et une variable binaire nb vaut 1 quand celui-ci est inférieur à 20% de la charge maximale, 0 sinon. Une autre variable binaire, notée pc , permet de savoir si la prise de courant est branchée ($pc = 1$) pour recharger la batterie ou débranchée ($pc = 0$).

Le cahier des charges définissant le fonctionnement du fauteuil conduit à la description du fonctionnement sous la forme du graphe d'états partiel de la figure 7. La mise en marche du système, réalisée par le démarrage de la carte de commande, prend 1 unité de temps (ut).

Q3. Compléter l'évolution de l'état du moteur (0 alimentation moteur coupée, 1 moteur alimenté) sur le chronogramme du document réponse 1 et indiquer le numéro de l'état actif à chaque évolution d'une entrée.

Une des exigences de sécurité impose que les moteurs ne soient pas alimentés quand personne n'est assis dans le fauteuil ou quand le fauteuil est en charge.

Q4. Décrire les différentes dispositions permettant de satisfaire ces critères.

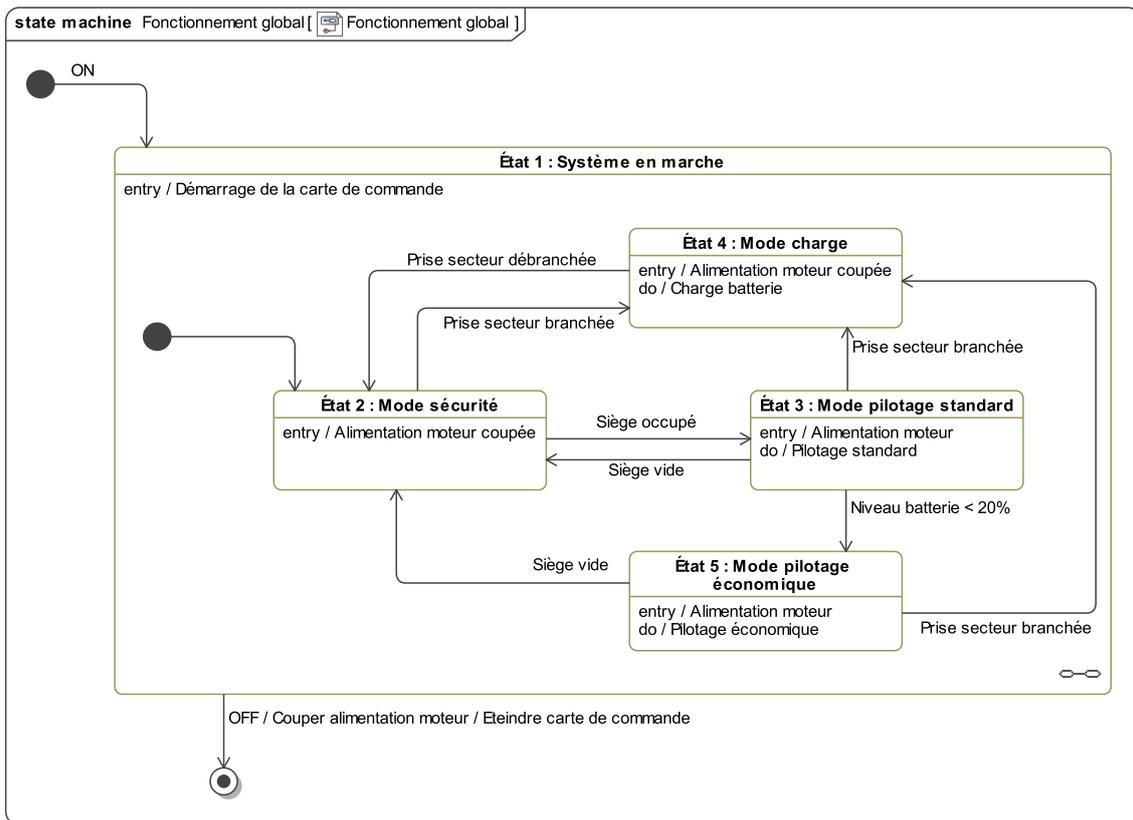


Figure 7 – Diagramme d'états partiel du fauteuil motorisé

III Étude de l'exigence 1.1.1 : Franchir des obstacles

Les différentes normes relatives à l'accessibilité des espaces publics aux personnes à mobilité réduite imposent certaines réalisations au niveau des accès des bâtiments. Les escaliers, infranchissables pour une personne en fauteuil roulant, doivent être remplacés ou complétés par des rampes d'accès. Comme l'indique la figure 8, extraite des textes normatifs, ces rampes peuvent avoir une pente maximale de 12 % (soit environ 6,8°).

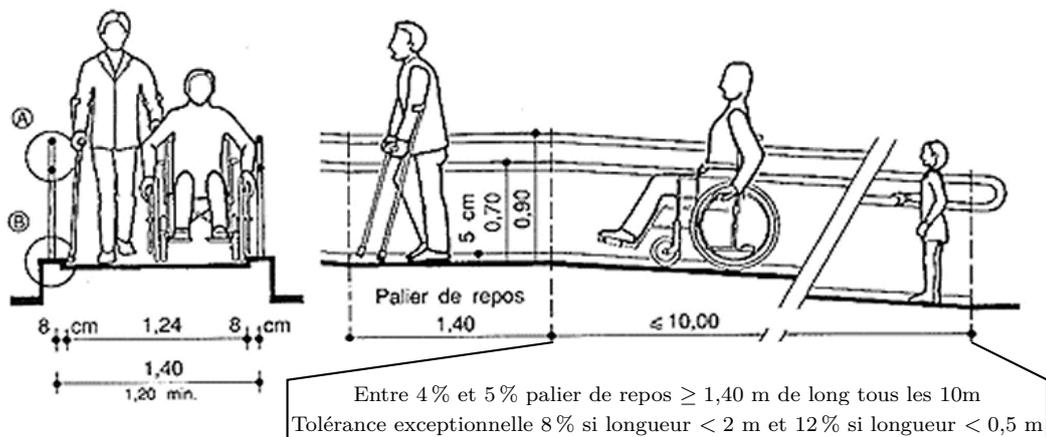


Figure 8 – Illustration des normes relatives aux accès des bâtiments pour les personnes à mobilité réduite

Objectif

Valider les performances du moteur vis-à-vis de l'exigence 1.1.1

La figure 9 (page 7), donne les dimensions du fauteuil motorisé et la figure 10 (page 7), le paramétrage de l'étude en phase de montée d'une pente.

Les hypothèses d'étude de cette partie sont :

- le référentiel $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, lié au sol, est supposé galiléen ;
- le fauteuil se déplace en ligne droite dans une phase de montée, le problème est considéré comme un problème plan ;
- le référentiel $\mathcal{R}_f(O_f, \vec{x}_f, \vec{y}_f, \vec{z}_f)$ est lié au fauteuil avec $\vec{y}_0 = \vec{y}_f$;
- $\vec{g} = -g \vec{z}_0$ est l'action de la pesanteur avec $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$;
- le vecteur position du fauteuil est $\overrightarrow{OO_f}(t) = x(t) \vec{x}_f + R \vec{z}_f$;
- chaque module Ez-Wheel fournit le même couple, noté C_m (ils peuvent fournir 70 N·m au maximum) ;
- on supposera que le problème est équivalent à un seul module Ez-Wheel qui fournit un couple $2C_m$ sur une seule roue arrière ;
- l'ensemble $\mathcal{S} = \{\text{fauteuil} + \text{roues motorisées} + \text{utilisateur}\}$ a une masse $M_S = 150 \text{ kg}$, son centre d'inertie est G ;
- le contact roue arrière/sol se fait avec frottement, on note f le coefficient de frottement ;
- l'inertie des roues et celle du moteur sont négligées ;
- l'inertie des roues étant faible devant les autres inerties, l'effort tangentiel (suivant \vec{x}_f) du sol sur les roues avant sera négligé ;
- les roues arrière sont en liaison pivot d'axe (O_f, \vec{y}_f) par rapport au châssis du fauteuil ;
- les liaisons autres que les liaisons roue/sol sont considérées comme parfaites.

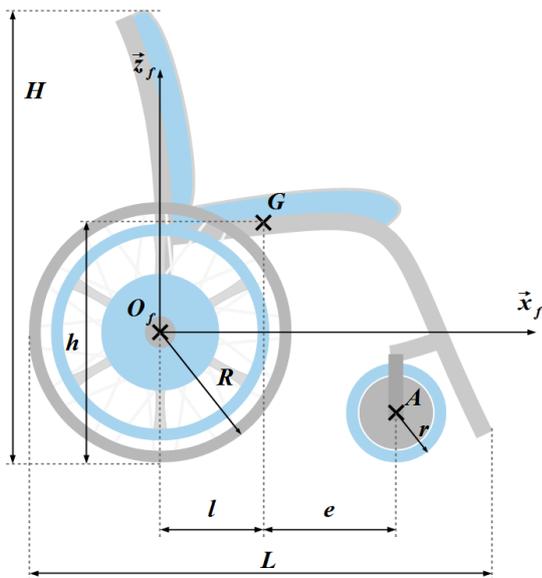


Figure 9 – Dimensions d'un fauteuil équipé de deux moteurs ez-Wheel

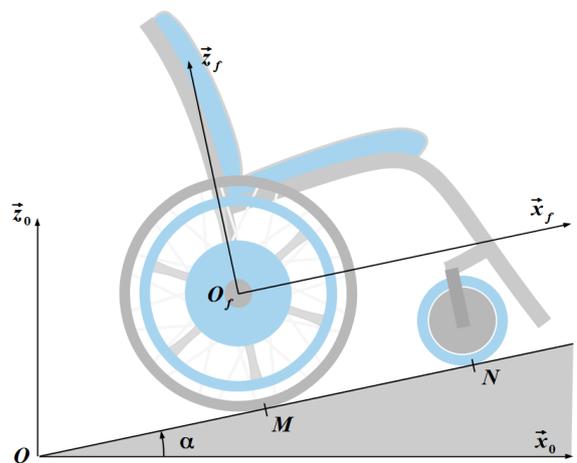


Figure 10 – Paramétrage de l'étude en phase de montée d'une pente

Les dimensions du fauteuil sont celles d'un fauteuil classique :

$$\begin{array}{llll} e = 400 \text{ mm} & h = 600 \text{ mm} & H = 1\,000 \text{ mm} & l = 200 \text{ mm} \\ L = 1\,300 \text{ mm} & r = 150 \text{ mm} & R = 400 \text{ mm} & \end{array}$$

Le torseur des actions mécaniques transmissibles par le solide i sur le solide j sera noté :

$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}}_{(i \rightarrow j)} \\ \vec{\mathcal{M}}_{(A, i \rightarrow j)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}}$$

Q5. Donner les expressions des torseurs des actions mécaniques transmissibles en faisant apparaître les composantes nulles et le repère choisi :

- du sol sur le fauteuil au niveau de la roue avant $\{T_{\text{sol} \rightarrow \text{roue avant}}\}$ au point N ,
- du sol sur le fauteuil au niveau de la roue arrière $\{T_{\text{sol} \rightarrow \text{roue arrière}}\}$ au point M ,
- et du poids sur le fauteuil $\{T_{\text{poids} \rightarrow \text{fauteuil}}\}$ au point G .

Q6. Déterminer l'expression du torseur dynamique de l'ensemble \mathcal{S} par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 au point G noté $\{\delta_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}\}$.

Q7. Écrire les trois équations scalaires du principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble \mathcal{S} en projection dans \mathcal{R}_f au point G .

Q8. Déterminer alors les expressions littérales de X_M , Z_M et Z_N en fonction de l'accélération $\ddot{x}(t)$, de M_S , e , g , h , l et α .

La paramétrage du système est tel que les composantes X_M et Z_M sont positives.

Q9. D'après le modèle de frottement de Coulomb, quelle relation existe-t-il entre X_M et Z_M dans la phase d'adhérence ?

Q10. En déduire l'accélération maximale du fauteuil $\ddot{x}(t)$ pour être à la limite du glissement. Faire l'application numérique pour une pente de 12 % (6,8 °) de béton mouillé ($f = 0,45$).

L'accélération maximale du fauteuil étant déterminée, on s'intéresse aux capacités mécaniques du motoréducteur du module Ez-Wheel.

Q11. En appliquant le théorème du moment dynamique à la roue arrière, déterminer l'expression du couple moteur C_m fourni par le module Ez-Wheel en fonction de l'accélération $\ddot{x}(t)$. Faire l'application numérique dans les conditions de limite de glissement et comparer la valeur trouvée à celle donnée par le constructeur, $C_m = 70 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Q12. Déterminer la valeur numérique de l'action Z_N dans le cas où le couple moteur correspond à celui déterminé à la question précédente. Que se passe-t-il physiquement ? Justifier alors le

choix du constructeur quant au couple délivré par le module Ez-Wheel en faisant le calcul de Z_N associée à cette valeur constructeur.

On suppose maintenant que les modules Ez-Wheel fournissent chacun un couple moteur $C_m = 70 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Q13. Calculer l'accélération du fauteuil, toujours dans le cas de la pente de $6,8^\circ$ et en déduire la capacité du fauteuil à monter la pente. Dans ces conditions, le fauteuil bascule-t-il ?

IV Étude de l'exigence 1.1 : Avancer/reculer

Afin de commander le déplacement du fauteuil, l'utilisateur dispose d'un joystick (figure 11).

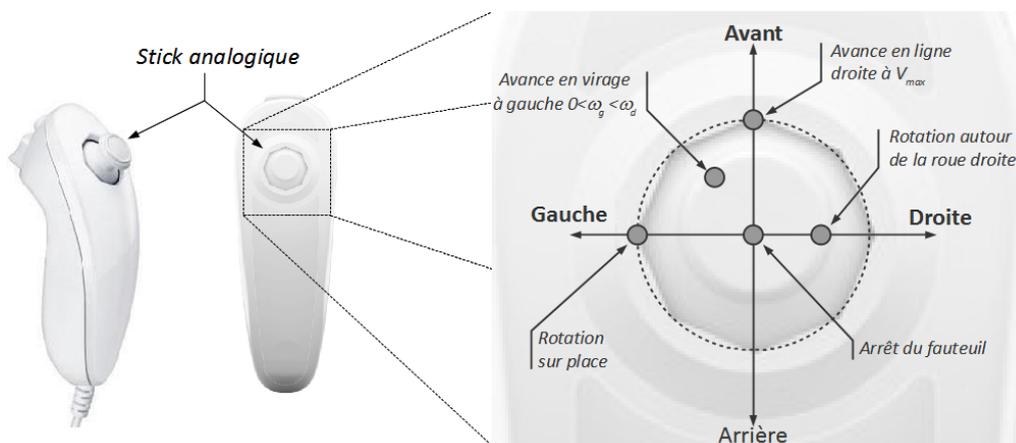


Figure 11 – Consignes de commande des roues en fonction de la position de la manette de commande

Cette manette de contrôle permet de piloter deux grandeurs (figure 12, page 10, et figure 13, page 11) :

- la vitesse du fauteuil, notée $V(t) = \|\vec{V}(O_f, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0)\|$;
- le rayon de courbure du fauteuil, noté $\rho(t)$.

Les deux moteurs ez-Wheel sont asservis en vitesse de rotation.

Objectif

Afin de vérifier les performances de l'exigence 1.1, les consignes en vitesse de rotation des deux moteurs seront reliées aux consignes du joystick. L'asservissement en vitesse d'un seul moteur sera modélisé et un correcteur permettant de vérifier le cahier des charges sera conçu.

IV.1 Relation entre les consignes joystick et les consignes moteur

Les hypothèses de la modélisation du déplacement du fauteuil sont (figures 12 et 13) :

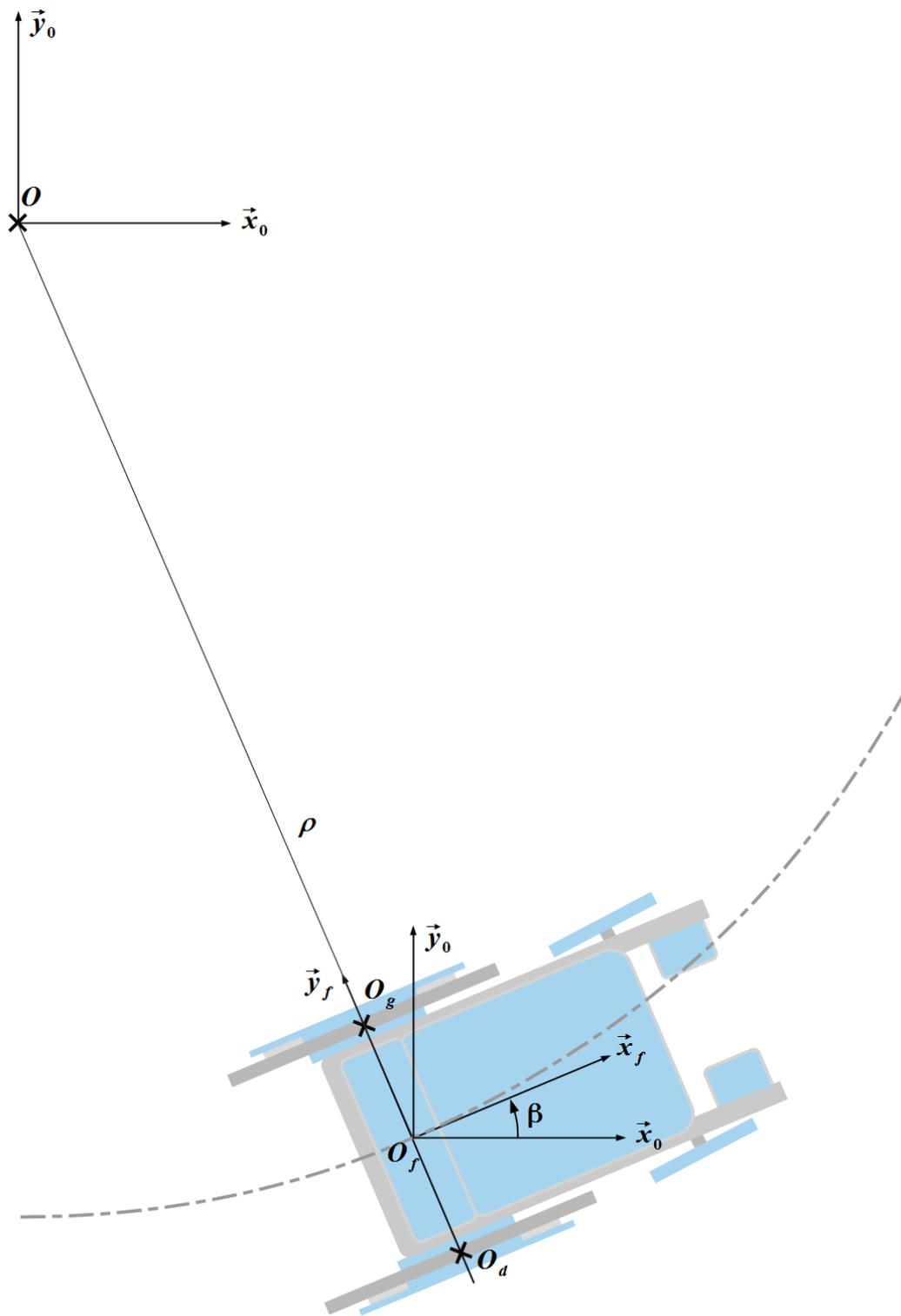


Figure 12 – Paramétrage du fauteuil en virage

- le mouvement du fauteuil sans les roues est un mouvement plan sur plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ par rapport au référentiel fixe \mathcal{R}_0 . Le point O est le centre de courbure du mouvement du fauteuil ;
- les deux roues arrière du fauteuil roulent sans glisser par rapport au référentiel fixe \mathcal{R}_0 ;
- la roue arrière gauche, notée \mathcal{R}_g , est en liaison pivot d'axe (O_g, \vec{y}_f) par rapport au châssis du fauteuil ;
- la roue arrière droite, notée \mathcal{R}_d , est en liaison pivot d'axe (O_d, \vec{y}_f) par rapport au châssis du fauteuil ;
- le rayon de courbure $\rho(t)$ est constant.

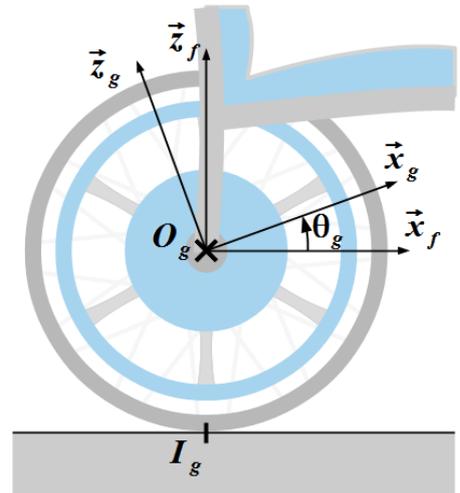


Figure 13 – Paramétrage de la roue gauche du fauteuil

Notations

- référentiel fixe : $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- référentiel lié au châssis du fauteuil : $\mathcal{R}_f(O_f, \vec{x}_f, \vec{y}_f, \vec{z}_f)$ avec $\vec{z}_0 = \vec{z}_f$;
- référentiel lié à la roue gauche : $\mathcal{R}_g(O_g, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ avec $\vec{y}_f = \vec{y}_g$;
- référentiel lié à la roue droite : $\mathcal{R}_d(O_d, \vec{x}_d, \vec{y}_d, \vec{z}_d)$ avec $\vec{y}_f = \vec{y}_d$;
- $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0) = \frac{d\beta}{dt} \vec{z}_0 = \dot{\beta} \vec{z}_0$;
- $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_g/\mathcal{R}_f) = \omega_g \vec{y}_f = \frac{d\theta_g}{dt} \vec{y}_f = \dot{\theta}_g \vec{y}_f$;
- $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_d/\mathcal{R}_f) = \omega_d \vec{y}_f = \frac{d\theta_d}{dt} \vec{y}_f = \dot{\theta}_d \vec{y}_f$;
- $\overrightarrow{OO_f} = -\rho \vec{y}_f$;
- $\overrightarrow{O_dO_f} = \overrightarrow{O_fO_g} = \frac{a}{2} \vec{y}_f$ avec $a = 700$ mm, la largeur du fauteuil ;
- I_g (respectivement I_d) est le point de contact entre la roue gauche (respectivement la roue droite) et le sol : $\overrightarrow{I_gO_g} = \overrightarrow{I_dO_d} = R \vec{z}_0$ avec R le rayon des roues arrière ;

IV.1.1 Modèle cinématique

Q14. Donner :

- la valeur de ρ et la relation entre ω_g et ω_d lorsque :
 - la trajectoire du fauteuil est une droite ;
 - le fauteuil tourne autour de l'axe (O_f, \vec{z}_0) ;
- les valeurs de ρ et ω_g lorsque le fauteuil tourne autour de l'axe (O_g, \vec{z}_0) .

Q15. Écrire trois expressions de $\vec{V}(O_f, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0)$:

- en fonction de R , a , ω_g et $\dot{\beta}$ en utilisant le roulement sans glissement au point I_g ;
- en fonction de R , a , ω_d et $\dot{\beta}$ en utilisant le roulement sans glissement au point I_d ;
- en fonction de ρ et $\dot{\beta}$ en utilisant la dérivation vectorielle.

Q16. En déduire les expressions de ω_g et ω_d en fonction de $V(t)$, de ρ et des données géométriques du fauteuil.

IV.2 Modélisation de l'asservissement en vitesse d'un moteur

Une roue ez-Wheel est composée d'un moteur brushless, d'un réducteur de rapport de transmission $\lambda = 5,25$ dont l'arbre de sortie est solidaire à une roue arrière du fauteuil roulant. Trois capteurs à effet Hall permettent de mesurer la vitesse de rotation de l'arbre moteur.

On modélisera le moteur brushless comme un moteur à courant continu :

$$u_m(t) = R_m i_m(t) + L_m \frac{di_m(t)}{dt} + e_m(t)$$

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t)$$

$$c_m(t) = K_i i_m(t)$$

$$e_m(t) = K_e \omega_m(t)$$

où :

- u_m est la tension aux bornes de l'induit (en V) ;
- i_m est l'intensité circulant dans l'induit (en A) ;
- e_m est la tension contre-électromotrice (en V) ;
- ω_m est la vitesse de rotation de l'arbre moteur (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) ;
- c_m est le couple moteur (en $\text{N}\cdot\text{m}$) ;
- c_r est le couple résistant appliqué sur l'arbre moteur (en $\text{N}\cdot\text{m}$) ;
- R_m est la résistance de l'induit $R_m = 0,18 \Omega$;
- L_m est l'inductance de l'induit, $L_m = 0,8 \text{ mH}$;
- J est la moitié de l'inertie équivalente de l'ensemble du fauteuil en charge et en mouvement ramené à un arbre moteur $J = 0,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$;
- K_i est la constante de couple du moteur $K_i = 0,2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$;
- K_e est la constance de force contre-électromotrice $K_e = 0,2 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$.

Les capteurs à effet Hall seront modélisés par un gain pur. La sortie du capteur de gain K_{cap} , notée $m(t)$, est soustraite à la sortie de l'amplificateur qui permet de convertir la vitesse de consigne, notée $\omega_{cons}(t)$, en une tension de consigne $u_{cons}(t) = K_a \omega_{cons}(t)$. On prendra $K_{cap} = 0,2 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$. L'écart obtenu est alors corrigé par un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ dont la sortie est la tension d'alimentation du moteur $u_m(t)$.

IV.2.1 Modélisation

Notation : la transformée de Laplace d'une fonction temporelle $f(t)$ sera notée $F(p)$.

On suppose que le correcteur a pour fonction de transfert $C(p) = K_p$ avec $K_p \geq 0$.

Q17. Compléter, sur le document réponse 3, le schéma bloc modélisant l'asservissement en vitesse de rotation d'un moteur. Comment choisir le gain K_a pour que la vitesse angulaire de l'arbre moteur soit correctement asservie ?

On note les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ telles que :

$$\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_{cons}(p) - H_2(p)C_r(p)$$

avec

$$H_1(p) = \frac{\frac{K_{cap}K_p}{K_e + K_{cap}K_p}}{1 + \frac{JR_m}{K_i(K_e + K_{cap}K_p)}p + \frac{JL_m}{K_i(K_e + K_{cap}K_p)}p^2}$$

Q18. Déterminer l'expression sous forme canonique de $H_2(p)$ en fonction de K_{cap} , K_p , K_e , K_i , R_m , L_m et J .

IV.2.2 Étude de la stabilité

Dans la suite du problème, la perturbation sera négligée : $c_r(t) = 0$.

On note $FTBO(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$ la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

Q19. Déterminer la forme canonique littérale de $FTBO(p)$.

On prendra dans la suite du problème $FTBO(p) = \frac{K_p}{1 + 2,25p + 0,01p^2}$.

Q20. Sur le document réponse 4, tracer les diagrammes asymptotiques et réels de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $K_p = 1$.

Q21. Pour quelle(s) valeur(s) numérique(s) de K_p , la marge de gain du cahier des charges est-elle vérifiée ?

Q22. Pour quelle(s) valeur(s) numérique(s) de K_p , la marge de phase du cahier des charges est-elle vérifiée ?

IV.2.3 Étude de la précision

On donne $V(t) = \frac{R}{2} [\omega_g(t) + \omega_d(t)]$ où :

- $V(t)$ est la vitesse du fauteuil ;
- R est le rayon d'une roue arrière du fauteuil ($R = 0,4$ m) ;
- ω_g et ω_d les vitesses de rotation des roues arrière gauche et droite.

De plus, en ligne droite, $\omega_g(t) = \omega_d(t)$.

Dans cette partie de l'étude, le couple résistant est toujours négligé : $c_r(t) = 0$.

La fonction de Heaviside sera notée $u(t)$ telle que $\begin{cases} \forall t < 0, u(t) = 0 \\ \forall t \geq 0, u(t) = 1 \end{cases}$.

Q23. Pour une entrée échelon, $\omega_{cons} = \omega_c u(t)$, donner la valeur finale de $\omega_m(t)$ en fonction de K_{cap} , K_p , K_e et ω_c . En déduire les valeurs de K_p qui permettent la validation du critère de précision de la vitesse du fauteuil imposé par le cahier des charges.

IV.2.4 Étude de la rapidité et du dépassement

On notera m le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre du dénominateur de $H_1(p)$.

Q24. Donner les expressions littérales de m et de ω_0 en fonction de K_{cap} , K_p , K_e , K_i , R_m , L_m et J . Donner leur expression numérique en fonction de K_p .

Q25. Quelle valeur de m permet d'obtenir une réponse de la roue la plus rapide sans dépassement ? Quelle est alors la valeur numérique de K_p ?

Informatique : Résolution numérique de l'équation différentielle

Pour la valeur de K_p déterminée précédemment, on cherche à déterminer numériquement le temps de réponse à 5% du moteur soumis à une entrée de type échelon unitaire. Cette étude va se faire en trois temps : résolution numérique de l'équation différentielle, test de convergence de la résolution et détermination du temps de réponse à 5%.

Dans cette partie, le candidat est libre de choisir entre Python ou Scilab pour l'écriture des algorithmes demandés.

La fonction de transfert $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{cons}(p)}$ conduit dans le domaine temporel à l'équation différentielle suivante, liant la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$ à la vitesse de consigne $\omega_{const}(t)$:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K \cdot \omega_{cons}(t)$$

Dans la suite, on s'intéressera uniquement à la réponse indicielle unitaire du système dans les conditions de Heaviside, ce qui revient à prendre $\omega_{cons}(t) = u(t)$ avec $\omega_m(0) = 0$ et $\omega'_m(0) = 0$.

En posant le vecteur \mathbf{Y} tel que $\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \end{pmatrix}$, l'équation différentielle à résoudre peut se mettre sous la forme

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t)) \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ K\omega_0^2 - \omega_0^2\omega_m(t) - 2m\omega_0 \frac{d\omega_m(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

La réponse $\omega_m(t)$ recherchée sur l'intervalle $[0, T_{max}]$ sera obtenue par la méthode d'Euler explicite.

Le pas de temps, noté pas , sera choisi constant. L'intervalle de temps discrétisé est alors représenté par le tableau $T = [t_0 = 0, t_1, \dots, t_{N-1} = T_{max}]$.

Pour chaque pas de temps, une valeur approchée \mathbf{Y}_i de la solution $\mathbf{Y}(t_i)$ de l'équation différentielle est recherchée. L'ensemble des \mathbf{Y}_i représente N vecteurs de dimensions 2, qui seront stockés en mémoire sous la forme du tableau

$$\mathbf{SY} = \begin{pmatrix} \omega_m(0) & \omega'_m(0) \\ \omega_m(t_1) & \omega'_m(t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \omega_m(T_{max}) & \omega'_m(T_{max}) \end{pmatrix}.$$

Q26. Écrire un algorithme ou une fonction permettant de calculer le tableau T .

Q27. Écrire une fonction $f1(ti, yi)$, qui prend en arguments la valeur du temps discrétisé i et la valeur du vecteur \mathbf{Y} au temps discrétisé ti et qui retourne la valeur de $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t))$.

Q28. Donner la relation de récurrence qui lie \mathbf{Y}_{i+1} à \mathbf{Y}_i et à $\mathbf{F}(t_i, \mathbf{Y}_i)$ en fonction du pas de temps pas .

Q29. Écrire une fonction $EulerExplicite(Yini, h, Tmax, F)$ qui prend en arguments $Yini$, un tableau de dimension 2 contenant la condition initiale de $\mathbf{Y}(t)$, h le pas de temps, $Tmax$ l'instant final du calcul, et F la fonction du problème de Cauchy.

Cette fonction renverra le tableau SY . L'appel à cette fonction dans le programme se fera avec la commande $SY=EulerExplicite(Y0, pas, tmax, f1)$.

Q30. Si le pas de temps est divisé par un facteur 10, comment évolue l'erreur de calcul ?

Q31. Donner la complexité de cette méthode pour T_{max} fixé et indiquer comment évolue le temps de calcul quand le pas de temps est divisé par un facteur 10.

On suppose que la quantité de mémoire nécessaire pour réaliser le calcul se limite au stockage de la matrice \mathbf{SY} et du vecteur \mathbf{T} . Ces éléments sont représentés en mémoire sous forme de tableaux de flottants en double précision.

Q32. Déterminer le nombre d'octets nécessaire en mémoire pour réaliser cette simulation numérique avec nombre de pas de temps $N = 10\,000$.

Informatique : Convergence de l'algorithme

Avant d'appliquer l'algorithme de recherche du temps de réponse à 5%, il est nécessaire de savoir si l'algorithme de simulation converge. Après calcul, la solution ω_m est stockée dans la variable \mathbf{W} .

On suppose que la solution converge si toutes les valeurs de ω_m pour t appartenant à $[0.9T_{max}, T_{max}]$ ne s'écartent pas de la valeur finale calculée, $\omega_m(T_{max})$, de plus de 0,1%.

Q33. Écrire une fonction $TestConvergence(t, w)$ qui prend en argument le tableau des temps t et la solution w et qui renvoie $True$ si le critère est vérifié, $False$ sinon.

Informatique : Détermination du temps de réponse à 5% du système

Q34. Écrire une fonction $CalculT5$ qui renvoie le temps de réponse à 5% si la convergence est vérifiée et -1 s'il n'est pas vérifié. Les entrées et sorties de cette fonction seront clairement définies.

La programmation et la simulation de l'algorithme précédent, dans les conditions de l'étude, ont permis de déterminer un temps de réponse $t_{5\%} = 0,045$ s.

IV.2.5 Bilan

Le comportement des deux moteurs est supposé conforme au modèle précédent.

Les perturbations ne sont pas prises en compte dans cette question.

Q35. À partir des résultats des questions **Q22**, **Q23** et **Q25**, proposer une valeur de gain K_p permettant de respecter le cahier des charges en maximisant le critère de rapidité.

IV.2.6 Étude de l'effet de la perturbation sur une roue

Le programme de simulation de la vitesse de rotation de l'arbre moteur $\omega_m(t)$ a permis d'obtenir la réponse pour des valeurs de gain K_p différentes et avec pour entrées $\omega_{cons}(t) = 300 u(t)$ (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) et $c_r(t) = 50 u(t - \tau)$ (en $\text{N}\cdot\text{m}$) avec $\tau = 0,25$ s (figure 14).

Q36. Expliquer la réponse obtenue vis-à-vis des trois performances de précision, de dépassement et de rapidité. Conclure quant au choix de la valeur de K_p trouvée à la question précédente.

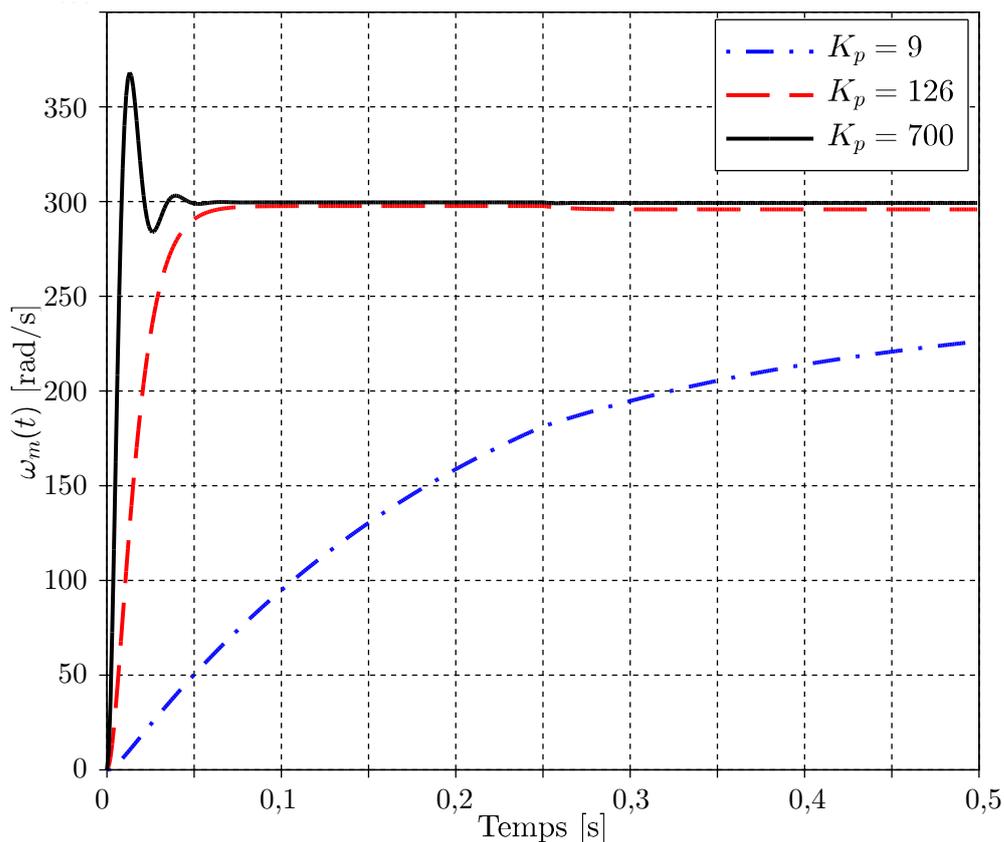


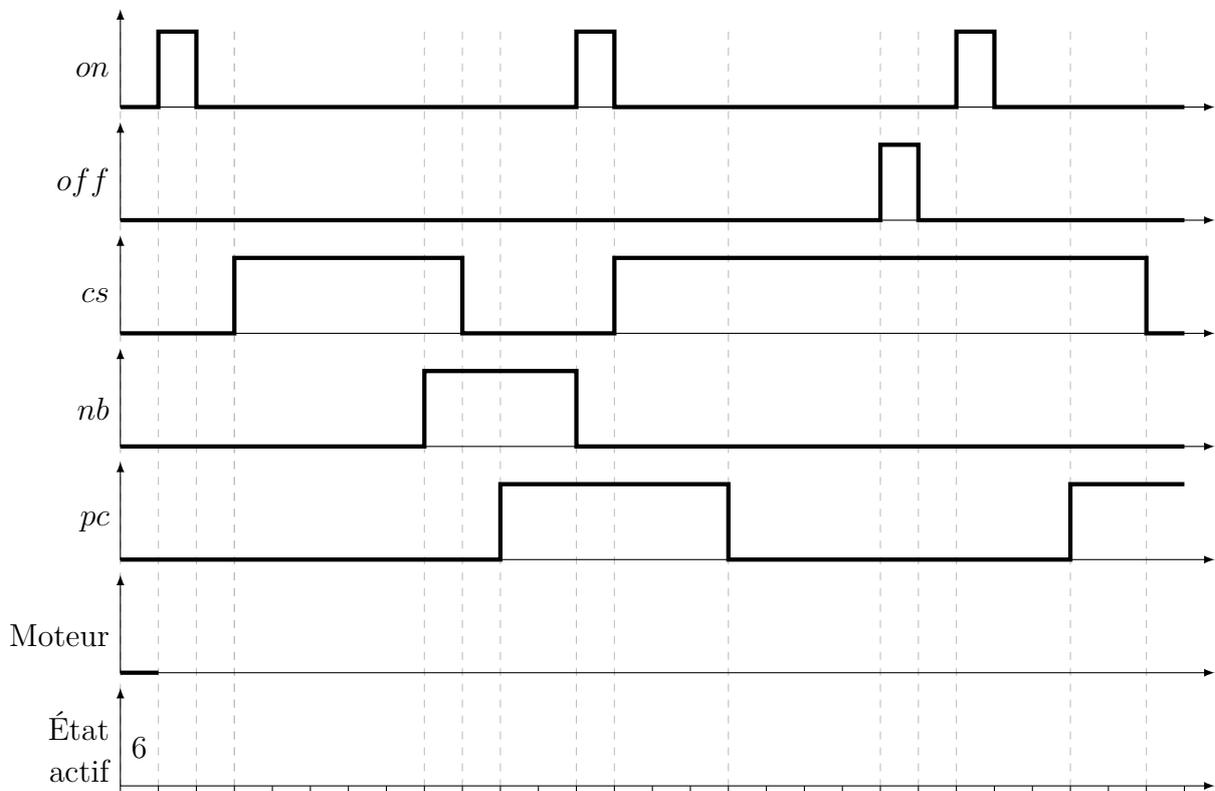
Figure 14 – Simulation du comportement d'une roue

Fin de l'énoncé

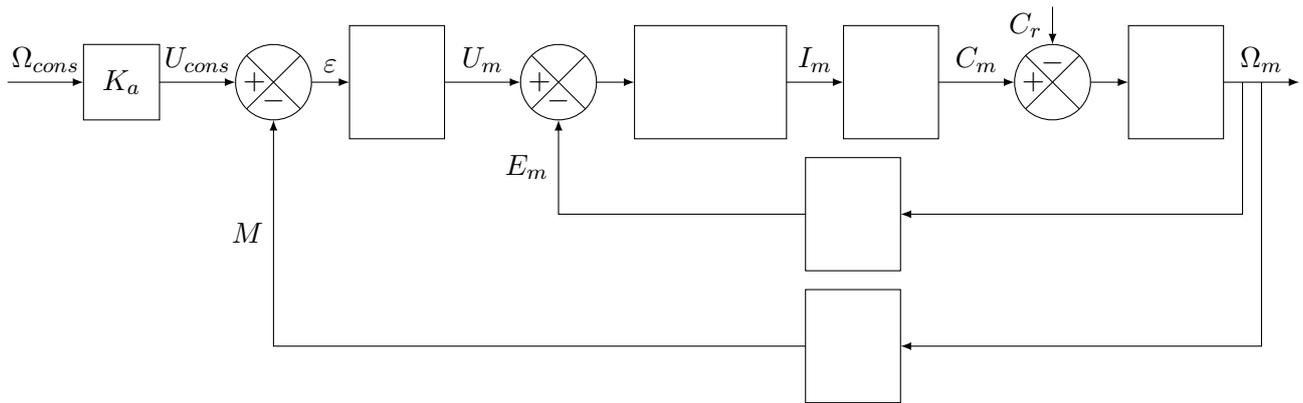
DOCUMENTS RÉPONSES
À rendre avec la copie.

Document réponse 1 : Chronogramme d'évolution du système

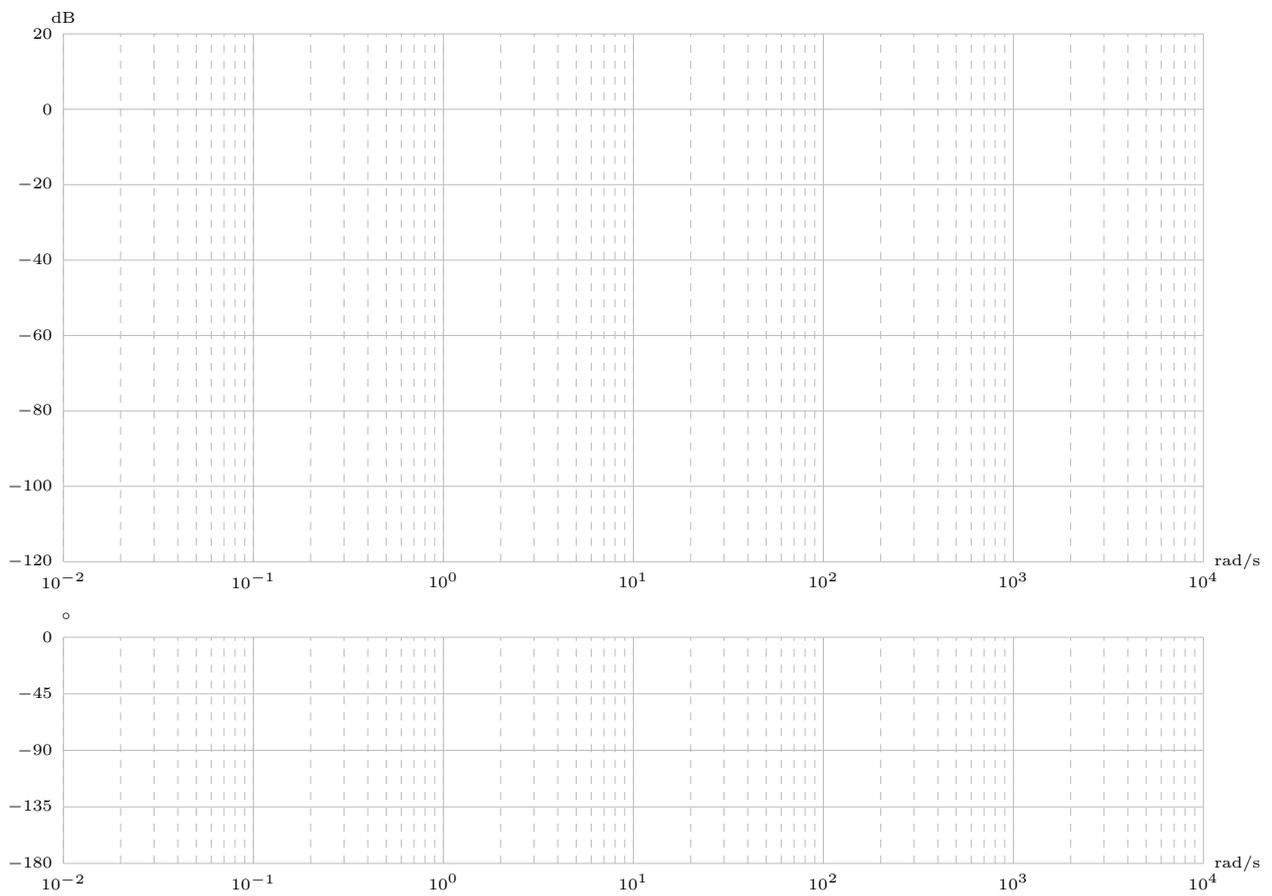
L'axe des abscisses correspond à l'axe des temps gradué en unité de temps (ut).



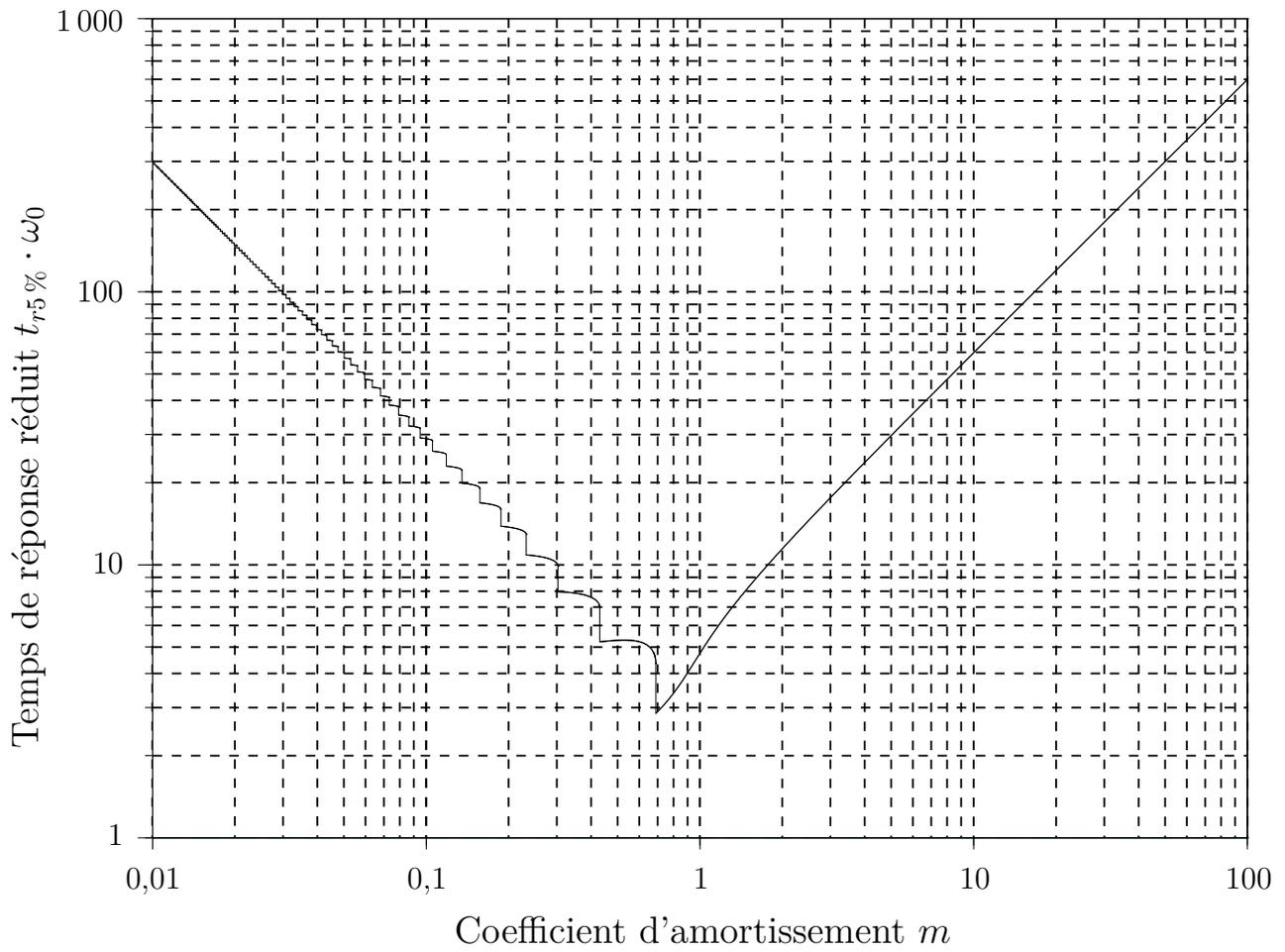
Document réponse 3 : modélisation de l'asservissement en vitesse de rotation d'un moteur



Document réponse 4 : tracé asymptotique des diagrammes de Bode de $FTBO(p)$ pour $K_p = 1$



Document réponse 5 : rapidité du système



$$t_{r5\%} \cdot \omega_0 =$$

$$t_{r5\%} =$$