Fardeleuse (Sujet concours TSI CCP 2011)

Contexte de l'étude :

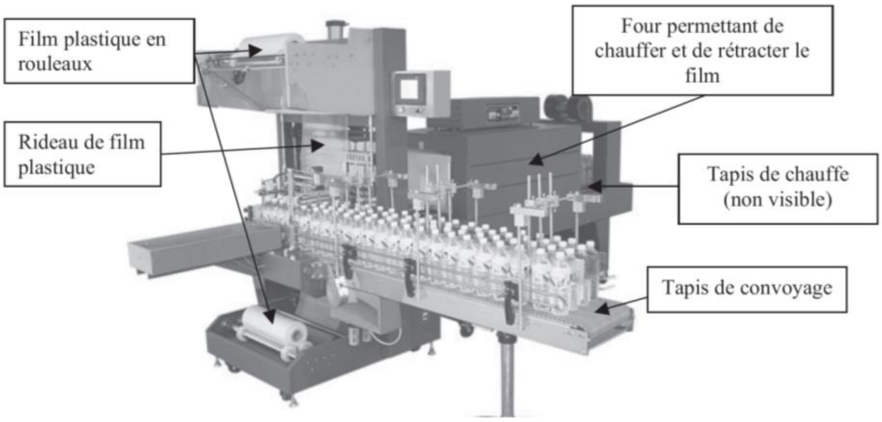
Pour satisfaire les clients, certains produits de grande consommation sont enveloppés sous film plastique pour à la fois les protéger, faciliter leur transport, leur manutention ou encore leur stockage. L'opération qui consiste à mettre le produit sous film s'appelle le fardelage et le système réalisant cette opération une fardeleuse.

Ici, 6 bouteilles d'eau sont emballées sous film plastique par une fardeleuse.

Présentation du procédé :

Le procédé de fardelage présente l'avantage de s'adapter à tous les formats et permet un emballage jusqu'à 6 faces. Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour réaliser l'opération de fardelage.

Celle proposée dans cette étude consiste à déposer un film plastique thermo-rétractable puis à le chauffer pour qu'il épouse la forme du produit à emballer.



Objectifs de l'étude :

L'objectif du travail proposé dans ce sujet est de vérifier les performances de la régulation de température à l'aide de deux modèles de complexité croissante et, si nécessaire, de proposer une évolution du système.

Etude du Cas d'Utilisation « Rétracter le film sur le produit »

Les objectifs de cette partie sont :

- de choisir une partie des constituants électriques permettant de réaliser l'exigence « chauffer le film » ;
- de modéliser le système de régulation de température en vue de définir la commande en tension permettant de respecter l'exigence : « réguler la température ».

Une fois entouré de film plastique, le produit est transféré sur un tapis de chauffe vers le four. C'est dans celui-ci qu'aura lieu la rétraction du film plastique autour du produit.

La mise en température est assurée par 3 résistances de chauffe alimentées par l'intermédiaire d'un relais statique triphasé à trains d'ondes entières. Ce relais statique est commandé par un signal venant de l'API.

La température est mesurée par un thermocouple qui transmet l'information au module d'entrée (analogique-numérique) dédié de l'API.

Le volume du four est V_{four} = 0,2 m^3, sa surface d'échange avec l'air est S_{four} = 2,2 m^2. Le réseau d'alimentation triphasé est de 230 V/400 V (50 Hz).

Les performances à atteindre par le système de rétractation du film sont les suivantes :

Exigence	**Critères**	**Valeurs**
Chauffer le film	Température max dans le four	200 °C
	Temps de montée en température	t = 10 minutes
Réguler la température	Précision de la régulation	2 °C à 180 °C

<u>Le choix des constituants électriques</u>

La mesure de la température est effectuée par un thermocouple qui sera choisi dans la liste suivante.

Type	**Gamme de températures mesurées**	**Précision**	**Sensibilité pour 0,1 °C**
T	-200 °C à 350 °C	+/- 1°C	4,1 µV
J	-40 °C à 750 °C	+/- 2,5°C	5,2 µV
E	-200 °C à 900 °C	+/- 2,5°C	6,1 µV
K	-200 °C à 1000 °C	+/- 2,5°C	4,0 µV

Question 1 : choisir le type de thermocouple en justifiant la réponse, vis-à-vis des valeurs des critères à atteindre par le système de régulation.

Réponse : température maxi = 200 °C, précision = 2 °C à 180 °C.
Le choix va être un thermocouple de type T : - 200 °C à 350 °C ± 1 °C et 4,1 µV pour 0,1 °C

La régulation en température de la résistance

Le four est modélisé par une enceinte calorifugée dans laquelle la température est considérée homogène. En introduisant la source de chaleur, on peut écrire l'équation de la chaleur :

$$\frac{dT}{dt} = \lambda_1 \times \sum Puissances$$

La régulation de la température dépend essentiellement du comportement de l'air emprisonné dans l'enceinte du four. Certaines caractéristiques de ce gaz sont rappelées dans le tableau ci-dessous.

Masse molaire : M_{air}	28.97 $g.mol^{-1}$
T° de fusion : T_f	-216.2°C
T° d'ébullition : T_e	-194.3°C
Masse volumique : ρ_{air}	1,2 $kg.m^{-3}$
Conductivité thermique : λ_{air}	0.0234 $W.m^{-1}.°C^{-1}$
Viscosité dynamique à 300°K	1.85 10^{-5} $kg.m^{-1}.s^{-1}$
Capacité Thermique Massique : c_{air}	1000 $J.kg^{-1}.K^{-1}$

Question 2 : que représente λ_1 dans l'équation précédente, quelle est son unité ? Parmi celles qui vous sont fournies, quelles sont les caractéristiques de l'air qui ont une importance dans lambda ?

On prendra : $\lambda_1 = \frac{1}{m_{air} \times c_{air}}$.

Réponse : λ_1 représente la quantité d'énergie à fournir pour augmenter d'un °K la masse d'air emprisonnée dans le four.

D'après la relation précédente : $K.s^{-1} = [\lambda_1].kg.m^2.s^{-3}$, donc l'unité de λ_1 est $K.s^2.m^{-2}.kg^{-1}$.

Il faut, d'après l'équation, utiliser les caractéristiques ρ_{air} et c_{air}.

Question 3 : calculer la valeur de λ_1.

Réponse : $\lambda_1 = 1/(0{,}2\times1{,}2\times1000) = 0{,}004166\ K.J^{-1}$.

La puissance thermique est produite par effet Joule par 3 résistances de même valeur R mises en série, dont le rendement sera considéré égal à 1. La puissance électrique est égale au produit de la tension par l'intensité et l'intensité est déterminée par la loi d'ohm.

Question 4 : écrire l'équation de la puissance électrique $P_{élec}$ des **3 résistances** en fonction de R et de U.

Réponse : la puissance électrique s'écrit $P_{élec} = 3\times U\times I$, en utilisant la loi d'ohm, $U = R \times I$, on obtient l'équation suivante : $P_{élec} = 3\times U^2/R$.

<u>Première hypothèse :</u> la seule puissance à prendre en compte est celle de la chauffe.

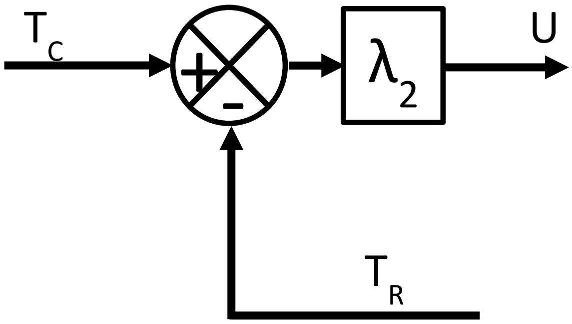
Question 5 : écrire l'équation différentielle qui lie la température *T*, le temps *t*, la tension *U* et la résistance *R*.

Réponse : $\frac{dT}{dt} = \lambda_1 \times 3 \times \frac{U^2}{R}$

Question 6 : un comparateur suivi d'un correcteur permettent de déterminer la tension *U* proportionnelle (avec un coefficient λ_2) à la différence entre la température de consigne T_C et la température réelle. Ecrire cette équation et la traduire sous la forme d'un schéma bloc. On prendra $\lambda_2 = 2$.

Réponse : $U = \lambda_2 \times (T_C - T)$

$U = 2 \times (T_C - T)$



Question 7 : a) en justifiant le signe de dT/dt, donner le sens de variations de T ;

Réponse : λ_1, R et U^2 sont positifs, donc la dérivée de T : dT/dt est positive et la fonction T sera croissante en temps.

b) résoudre l'équation différentielle et vérifier que la température T peut s'écrire, en Kelvin, sous la forme $T(t) = 453 - \frac{1}{0{,}0005 \times t + 0{,}00625}$

On prendra, pour faire le calcul, une résistance R = 100Ω et une température initiale T(0) = 20°C. On donne la valeur de consigne T_C = 180°C.

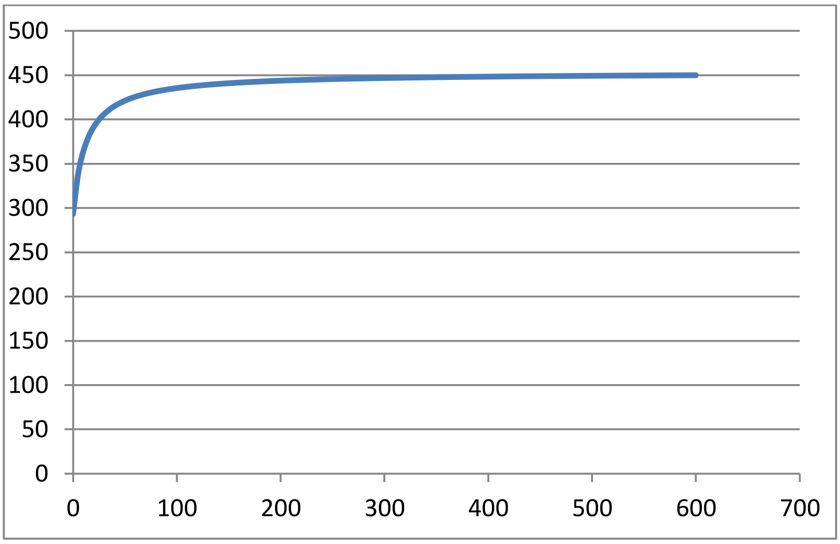
Réponse : $\frac{dT}{dt} = \lambda_1 \times \frac{3 \times U^2}{R}$ $\quad \frac{dT}{dt} = \lambda_1 \times \frac{3 \times (2 \times (T_C - T))^2}{R}$

$T(t) = \frac{-1}{12 \times \frac{\lambda_1}{R} \times t - \frac{1}{T_0 - T_C}} + T_C \quad T(t) = 453 - \frac{1}{0{,}0005 \times t + 0{,}00625}$

Question 8 : a) étudier les variations de la fonction T ;

b) tracer l'allure de la courbe.

Réponse :



Question 9 : calculer la limite de T quand t tend vers l'infini et en donner une interprétation graphique.

$$\lim_{t \to \infty} T(t) = 453°K$$

Question 10 : vérifier la validité du cahier des charges.

Le cahier des charges n'est pas respecté car la température au bout de 10 min est de 176.73°C, ce qui ne correspond pas à la fourchette 180°C +/-2°C donnée dans le cahier des charges.

Question 11 : calculer la puissance consommée et sa limite quand t temps vers l'infini.

$$P(t) = 3 \times \frac{U(t)^2}{R} = \frac{3}{100} \times \left(\frac{1}{0{,}0005 \times t + 0{,}00625}\right)^2, \lim_{t \to \infty} P(t) = 0\ W$$

Question 12 : critiquer ce résultat. Quelle interprétation en faire en terme d'énergie ? En déduire, ce qui se passe réellement, critiquer les hypothèses.

La puissance consommée tend vers 0, c'est normal avec des hypothèses de pertes nulles mais cela ne correspond pas à la réalité.

<u>Deuxième hypothèse</u> : les pertes thermiques vont être prises en compte dans cette seconde partie. Pour les modéliser, l'équation mathématique précédente a été modifiée comme suit. La température extérieure sera considérée à 20°C.

$$\frac{dT}{dt} = \lambda_1 \times \left(\frac{3\times U^2}{R} - \lambda_3 \times (T - T_{ext})\right) = \lambda_1 \times \left(\frac{3\times(\lambda_2\times(T_C - T))^2}{R} - \lambda_3 \times (T - T_{ext})\right) \quad (1)$$

Avec $\lambda_3 = h \times S_{four}$, h étant le coefficient de transfert thermique. Il vaut h = 5 $W.m^{-2}K^{-1}$ pour l'acier.

Question 13 : à quoi correspond l'expression qui a été ajoutée à l'équation ? Calculer λ_3.

L'expression ajoutée correspond au calcul de la puissance liée aux pertes thermiques. $\lambda_3 = 11 W.K^{-1}$.

Afin de résoudre cette équation différentielle, poser *X(t) =* $T_C - T(t)$

Question 14 : exprimer $\frac{dX(t)}{dt}$ en fonction de T(t) et préciser X(0).

$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{dT(t)}{dt}$, avec X(0) = 160°C.

Question 15 : démontrer que T vérifie (1) si et seulement si X vérifie :

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{3\times\lambda_1}{R} \times \lambda_2^2 \times X^2(t) - \lambda_1 \times \lambda_3 \times X(t) + \lambda_1 \times \lambda_3 \times (T_C - T_{ext}) \quad (2)$$

T vérifie (1) ssi $\frac{dT(t)}{dt} = \lambda_1 \times \left(\frac{3\times(\lambda_2\times(T_C - T))^2}{R} - \lambda_3 \times (T - T_{ext})\right)$

ssi $\frac{dT(t)}{dt} = \lambda_1 \times \left(\frac{3\times(\lambda_2\times(T_C - T))^2}{R} - \lambda_3 \times (T - T_C) - \lambda_3 \times (T_C - T_{ext})\right)$

ssi $-\frac{dX(t)}{dt} = \lambda_1 \times \left(\frac{3\times(\lambda_2\times X(t))^2}{R} + \lambda_3 \times (T_C - T) - \lambda_3 \times (T_C - T_{ext})\right)$

ssi $\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{3\times\lambda_1}{R} \times \lambda_2^2 \times X^2(t) - \lambda_1 \times \lambda_3 \times X(t) + \lambda_1 \times \lambda_3 \times (T_C - T_{ext})$

Question 16 : on note P le polynôme défini pour tout X par :

$P(x) = -\frac{3\times\lambda_1}{R} \times \lambda_2^2 \times X^2 - \lambda_1 \times \lambda_3 \times X + \lambda_1 \times \lambda_3 \times (T_C - T_{ext})$,

a) Calculer les coefficients de P en donnant des valeurs approchées à 10^{-4} près ;

$$-0{,}0005 \times X^2(t) - 0{,}0458 \times X(t) + 7{,}3322 = 0$$

b) Calculer les racines de P, que l'on notera r_1 et r_2 , de ce polynôme et le factoriser.

On notera r_1 la plus grande des racines de P, on donnera les valeurs approchées à 10^{-3} près ;

Le discriminant est alors $\Delta = (\lambda_1 \times \lambda_3)^2 + 4 \times \frac{3\times\lambda_1^2}{R} \times \lambda_2^2 \times \lambda_3 \times (T_C - T_{ext})$ = 0,017

$r_1 = \frac{\lambda_1\times\lambda_3+\sqrt{\Delta}}{\frac{6\times\lambda_1\times\lambda_2^2}{R}} = 83{,}656$ et $r_2 = \frac{\lambda_1\times\lambda_3-\sqrt{\Delta}}{\frac{6\times\lambda_1\times\lambda_2^2}{R}} = -175{,}32$ et on a, pour tout X réel, P(X) = a(X-r_1)(X-r_2).

c) déterminer le signe de P en fonction de X. Sur quel intervalle le polynôme est-il strictement positif ?

P est du signe de a à l'extérieur de ses racines, il est donc strictement positif sur l'intervalle :] r_2 ; r_1[

Question 17 : soit la fonction f définie sur IR\{r_1 ;r_2} par f : $X \to \frac{1}{(X-r_1)} \times \frac{1}{(X-r_2)}$, déterminer les coefficients A et B tels que $f(x) = \frac{A}{(X-r_1)} + \frac{B}{(X-r_2)}$.

$$\frac{1}{(X-r_1)} \times \frac{1}{(X-r_2)} = \frac{A}{(X-r_1)} + \frac{B}{(X-r_2)} = \frac{A \times (X-r_2)}{(X-r_1)} \times \frac{B \times (X-r_1)}{(X-r_2)}$$

donc, $A + B = 0$ et $-A \times\ r_2 - B \times r_1 = 1$, donc $A = \frac{-1}{r_2-r_1}$ et $B = \frac{1}{r_2-r_1}$

Donc, pour tout X de IR\{r_1;r_2}, on a $f(X) = \frac{-1}{(r_2-r_1)} \times \frac{1}{(X-r_1)} + \frac{1}{(r_2-r_1)} \times \frac{1}{(X-r_2)}$

En déduire une primitive de f, pour tout x de]r_2 ; r_1[. On écrira cette primitive sous la forme d'un seul ln et on vérifiera que la primitive est bien définie.

$$F(x) = \frac{-1}{(r_2-r_1)} \times ln|X-r_1| + \frac{1}{(r_2-r_1)} \times ln|X-r_2|$$

Sur l'intervalle de]r_2 ; r_1[, on a $\mathrm{X} - \mathrm{r}_1 < 0$ donc $|X-r_1| = \mathrm{r}_1 - \mathrm{X}$

$\mathrm{X} - \mathrm{r}_2 > 0$ donc $|X-r_2| = \mathrm{X} - \mathrm{r}_2$

Donc, $F(x) = \frac{-1}{r_2-r_1} \times ln\left(\frac{r_1-X}{X-r_2}\right)$

Qui est bien définie, car sur]r_2 ; r_1[, on a bien $\frac{r_1-X}{X-r_2} > 0$

On souhaite résoudre $\frac{dX(t)}{dt} = a \times X^2(t) + b \times X(t) + c$ (2)

Question 18 :

a) montrer que X vérifie $\frac{r_1-X(t)}{X(t)-r_2} = e^{-a(r_2-r_1)t+K}$, où K est un réel ;

$\frac{dX(t)}{dt} = a \times X^2(t) + b \times X(t) + c$ ssi $\frac{dX(t)}{a\times(X-r_1)\times(X-r_2)} = dt$ ssi $\frac{dX(t)}{(X-r_1)\times(X-r_2)} = a \times dt$

lorsqu'on intègre, on a

$\frac{-1}{r_2-r_1} \times ln\left(\frac{r_1-X}{X-r_2}\right) = a \times dt$ ssi $ln\left(\frac{r_1-X}{X-r_2}\right) = -a \times (r_2-r_1) \times t + K$

ssi, $\frac{r_1-X}{X-r_2} = e^{-a(r_2-r_1)t+K}$

b) en déduire l'expression de X (t) en fonction de t ;

On a donc : $r_1 - X = (X-r_2) \times e^{-a(r_2-r_1)t+K}$

ssi $r_1 - X = X \times e^{-a(r_2-r_1)t+K} - r_2 \times e^{-a(r_2-r_1)t+K}$

ssi $X = \frac{r_1+r_2\times e^{-a(r_2-r_1)t+K}}{e^{-a(r_2-r_1)t+K}+1}$

c) en déduire l'expression de T en fonction de t ;

$T(t) = 453.15 - \frac{r_1 + r_2 \times e^{-a(r_2 - r_1)t + K}}{e^{-a(r_2 - r_1)t + K} + 1}$.

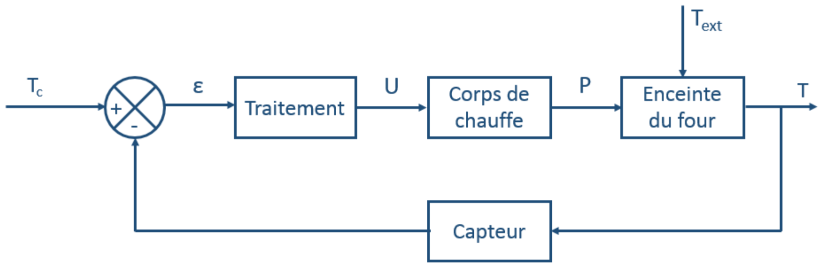
d) donner calculer la limite $\lim_{t \to \infty} T(t)$.

$\lim_{t \to \infty} T(t) = 453.15 - r_1 = 369.5K = 96.34°C$.

Question 19 : le cahier des charges est-il respecté ?

Le cahier des charges n'est pas respecté puisque la valeur souhaitée était de 180°C.

Le schéma fonctionnel suivant décrit la structure du système.



Question 20 : sur quel composant faut-il agir afin d'améliorer la réponse du système vis-à-vis du cahier des charges ?

Afin de garantir le respect de l'exigence il faut modifier le traitement et ajouter un correcteur. Il serait possible d'isoler l'enceinte du four mais les pertes existeraient toujours.