

Remarque Générale

Ce sujet ne peut être considéré comme étant prêt à être donné comme épreuve. Il est long et il a surtout pour vocation de montrer l'agencement entre les disciplines et le type d'étude possible (26 questions en physique, 12 questions en SII et 11 questions en ingénierie numérique).

Valorisation énergétique des eaux usées



Photo 1 : Station d'épuration.

Le sujet concerne la dualité eau - énergie. Pour aller vers une plus grande autonomie énergétique, il est possible de travailler dans deux directions :

- la minimisation de la dépense des postes énergivores ;
- la valorisation de l'énergie présente dans les eaux usées et les boues.

1. Présentation

Le poste qui consomme entre 60 et 70 % de la dépense énergétique d'une station d'épuration est l'aération d'un des bassins. Elle se fait de manière couplée en insufflant de l'air à l'aide de

diffuseurs et en créant un déplacement de l'eau à l'aide d'un agitateur à hélice. La première étude porte sur ce dispositif. Elle comporte :

- la modélisation du système d'hélice afin de trouver la relation entre la vitesse du fluide et la vitesse de rotation de l'hélice ;
- la modélisation de l'alimentation en énergie du moteur ;
- la modélisation du traitement du capteur qui permet de mesurer le niveau d'oxygène ;
- la modélisation de la commande de l'hélice par graphe d'état ;
- la modélisation de la commande par un asservissement ;
- l'analyse des résultats afin de choisir la commande la moins énergivore.

La valorisation de l'énergie se fait avec la récupération de méthane par digestion des boues et la récupération de la chaleur présente dans les collecteurs d'eaux usées. Les trois autres études sont donc :

- la modélisation du phénomène de méthanisation ;
- la modélisation de la récupération d'énergie par échangeur ;
- la résolution numérique des équations de l'échangeur afin de prévoir la capacité de récupération d'un échangeur de la ville de Marseille.

2. Modélisation de l'hélice

Objectif de l'étude : l'objectif est de déterminer la relation entre la vitesse de rotation de l'hélice et la vitesse d'écoulement du fluide qui permettra une bonne aération.

2.1 Présentation

- Le rôle de l'agitation dans les bassins à boues activées est d'homogénéiser les flocs bactériens (Ensemble de bactéries sur lesquelles viennent s'agglomérer des impuretés) et l'eau à traiter par une mise en circulation du fluide et un maintien en suspension de la biomasse, afin d'optimiser l'activité biologique de dépollution. Selon la technologie utilisée, les besoins d'agitation et d'aération peuvent être assurés par un même système ou découplés. Dans ce dernier cas, ce qui est le plus fréquent actuellement, les performances de chacun des systèmes peuvent être optimisées ce qui permet :
 - d'augmenter le potentiel d'élimination de l'azote en augmentant la vitesse de dénitrification. Lorsque l'aération est stoppée, l'agitation indépendante assure la mise en contact entre le substrat (nitrate, nitrite) et les bactéries dénitrifiantes ;
 - de limiter le dépôt de la biomasse ;
 - d'augmenter le transfert d'oxygène : un meilleur transfert est obtenu avec une vitesse de circulation non nulle. On parle alors d'aération oblique.
- Il est important de noter que les avantages ci-dessus s'appliquent pour des systèmes équipés d'agitateurs immergés et de rampes d'aération à fines bulles installées en fond de bassin. Dans le cadre de cette étude, seul ce type d'équipement sera étudié en détail. L'agitateur est une hélice plongée dans un bassin oblong.

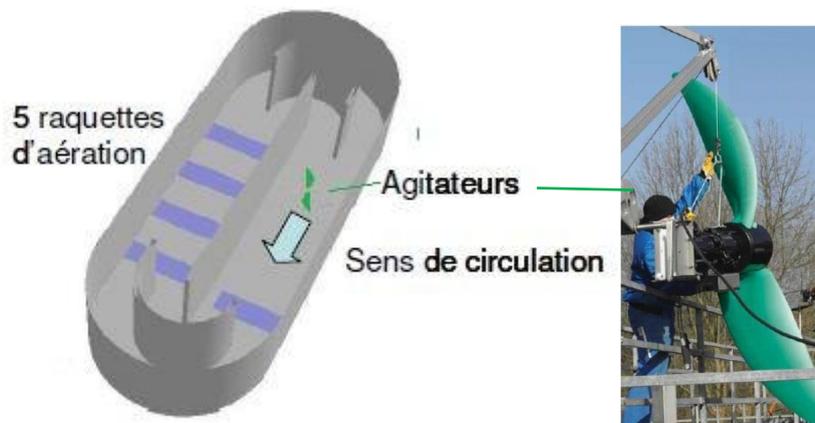


Photo 2 : bassin de circulation et agitateur

La mise en circulation de la phase liquide a un impact favorable sur le rendement de transfert d'oxygène vers l'eau. La figure ci-dessous montre l'apport horaire en oxygène en fonction de la vitesse d'écoulement du fluide.

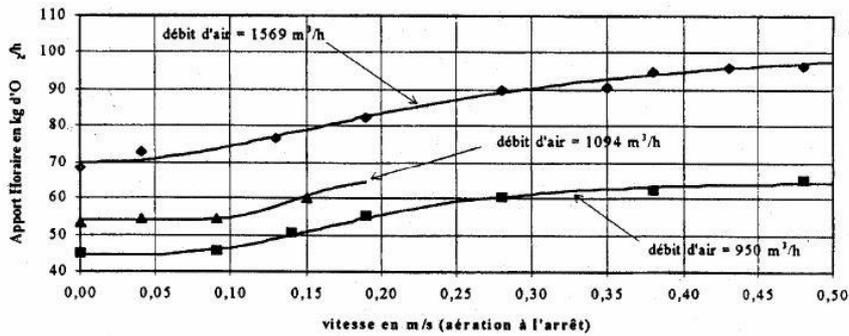


Figure 1 : Influence de la vitesse liquide sur l'apport horaire pour différents débits

Question 1 Justifier le choix d'utiliser une vitesse d'écoulement de $0,35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans le bassin.

2.2 Modélisation de l'écoulement du fluide

Dans cette partie, on étudie l'interaction mécanique entre l'eau en mouvement et l'hélice de l'agitateur. C'est une étude locale, on se placera dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen. Il lui est lié un repère cartésien.

En amont, loin de l'agitateur, l'écoulement de l'eau est uniforme et permanent, de vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{x}$ et la pression est elle aussi uniforme, de valeur P_0 ; on suppose en effet que les effets de la pesanteur sont négligeables. On note ρ la masse volumique de l'eau.

L'hélice est formée très schématiquement d'un mât portant une hélice d'axe horizontal.

- On suppose que la perturbation apportée par le mât à l'écoulement de l'eau est négligeable.
- On ne s'intéresse pas pour le moment aux détails de l'écoulement de l'eau au voisinage de l'hélice, et donc pas non plus à la forme précise des pales qui forment l'hélice; il suffira donc de modéliser la surface balayée par ce dernier par un disque de centre O et de diamètre D, d'axe \vec{x} .

La pression loin en aval est uniforme, de valeur P_0). La vitesse n'est uniforme, loin en aval, qu'à l'intérieur du tube de courant considéré et vaut \vec{v}_s .

L'écoulement de l'eau est supposé parfait (sauf au voisinage immédiat de l'hélice), stationnaire et incompressible. Il présente une symétrie de révolution autour de l'axe (O, \vec{x}) . On suppose que l'influence du sol est négligeable. La figure 2 représente l'allure du tube de courant qui s'appuie sur le pourtour de l'hélice. La section de ce tube de courant est supposée varier lentement avec x : on la note $S(x)$.

La section du tube de courant varie d'une valeur S_E , loin en amont, à une valeur S_S , loin en aval, en passant par la valeur $S_R = \frac{\pi D^2}{4}$ au niveau de l'hélice.

Du fait de la variation lente de $S(x)$, la vitesse peut être considérée comme uniforme sur chaque section $x = \text{cte}$ de ce tube de courant et dirigée selon \vec{x} : $\vec{v} = v(x) \vec{x}$.

En particulier, on considère qu'au niveau de l'hélice, la vitesse du fluide est de la forme $\vec{v}_R = v_R \vec{x}$.

On notera $P(x)$, la pression dans le tube de courant à l'abscisse x . Dans le tube de courant, on fait l'approximation de considérer l'écoulement comme uniforme, loin en aval de l'hélice $\vec{v}_S = v_S \vec{x}$. La pression est aussi uniforme, à la même pression P_0 qu'en amont.

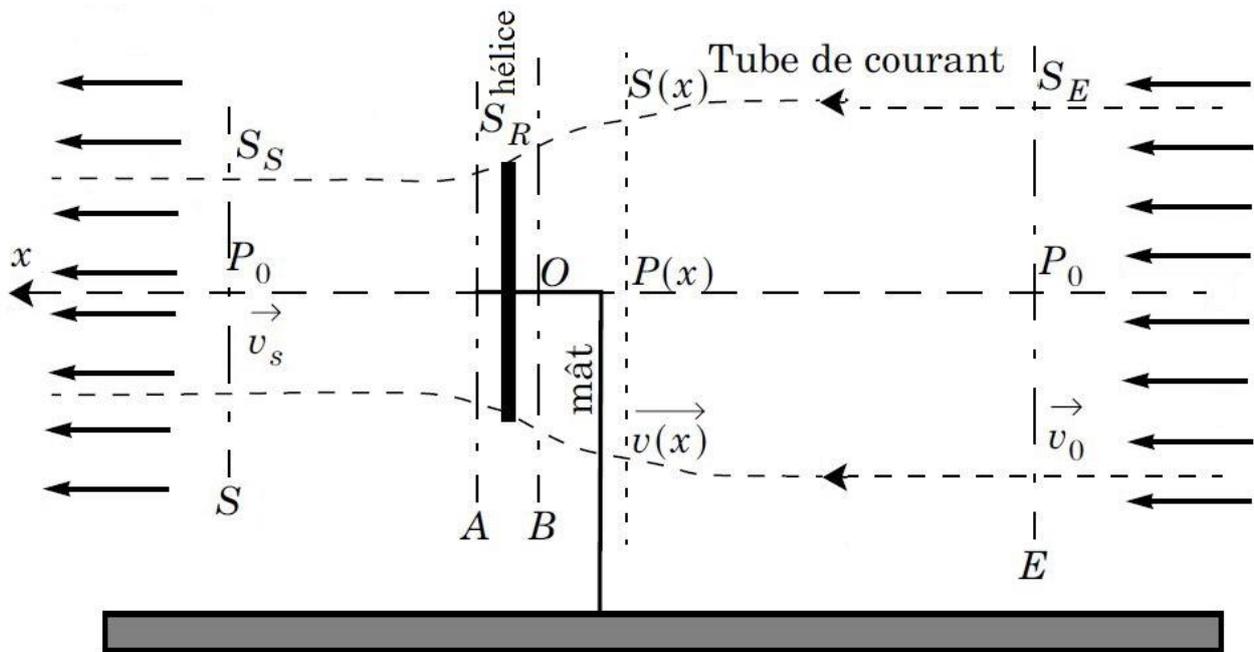


Figure 2 : Schéma du tube de courant s'appuyant sur le pourtour de l'hélice (Les normes relatives de \vec{v}_0 et \vec{v}_s n'ont pas été respectées sur cette figure).

On a donc, dans le tube de courant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} v_0 \\ p(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} P_0 \\ S(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} S_E \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v(x=0) = v_R \\ S(x=0) = S_R \end{array} \right. , \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} v_s \\ p(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} P_0 \\ S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} S_S \end{array} \right.$$

On définit quatre sections E, A, B, S du tube de courant. A et B sont situées de part et d'autre de l'hélice, et à sa proximité immédiate d'où nous avons $v_A = v_B = v_R$.

On considérera ainsi que $S_A = S_B = S_R$, conformément au modèle d'une hélice plate. Enfin, la pression à l'extérieur du tube de courant est supposée non modifiée par la présence de l'hélice et a donc la valeur uniforme P_0 . On note $\vec{F} = F\vec{x}$ la force totale exercée par l'hélice sur le fluide.

Question 2 Établir une relation entre les grandeurs v_0, v_s, S_E et S_S et une autre entre v_0, v_R, S_E et S_R . Justifier la forme du tube de courant de la figure 2.

Question 3 Ecrire la relation de Bernoulli entre E et B puis entre A et S. En déduire la relation entre v_0, v_s, P_A, P_B, ρ .

Question 4 Effectuer un bilan macroscopique sur une fine tranche à cheval sur l'hélice (entre A et B). En déduire la relation entre P_A, P_B, S_R et F .

Question 5 A partir des relations précédentes, écrire l'expression de la force de poussée F en fonction de v_0, v_s, S_R, ρ .

On considère le système $\Sigma(t)$ formé de l'eau contenue à la date t , dans le tube de courant, entre les sections E et S ; c'est un système ouvert. On considère alors le système fermé Σ^* , défini par :

- à t , $\Sigma^* = \Sigma(t) +$ la masse δm_E d'eau qui va entrer en E entre t et $t + dt$
- à $t + dt$, $\Sigma^* = \Sigma(t+dt) +$ la masse δm_S d'eau qui est sortie en S entre t et $t + dt$

Un bilan de masse donne $q_{mE} = q_{mS} = \rho v_0 S_E dt$.

Question 6 À l'aide d'un bilan de quantité de mouvement sur Σ^* , établir une relation entre v_0 , v_S , S_E , ρ et F .

Question 7 Dédurre des questions qui précèdent l'expression de la vitesse v_R , de l'eau au niveau de l'hélice, en fonction de v_0 et v_S . Il s'agit de la relation de Betz.

2.3 Relation entre la vitesse de rotation de l'hélice et la vitesse du fluide

Il faut désormais trouver la relation entre la vitesse de rotation de l'hélice et la translation du fluide.

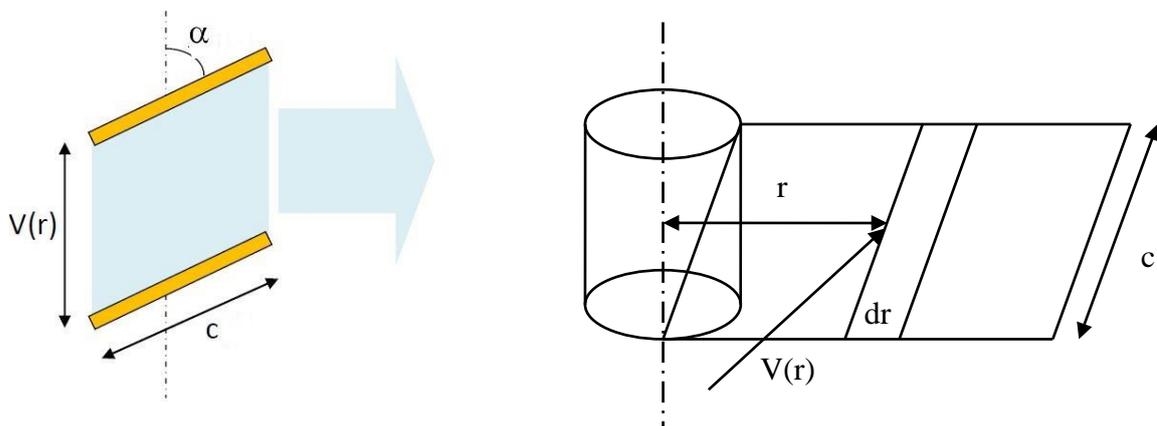


Figure 3 : représentation de l'hélice et du fluide

On admet que la masse élémentaire $\delta^2 m(r)$ de fluide expulsé pendant dt par l'élément de pale de l'hélice située entre r et $r+dr$ du centre de rotation a pour expression :

$$\delta^2 m(r) = c \sin(\alpha) v(r) dr dt$$

avec :

- $v(r)$ la vitesse d'un point de la pale en m/s à une distance r de l'axe de rotation
- ω la vitesse angulaire de rotation de l'hélice en rad/s

Question 8 Exprimer le débit massique élémentaire $dq_m(r)$ de fluide expulsé par l'élément de pale de l'hélice situé entre r et $r+dr$ du centre de rotation.

Question 9 Calculer le débit massique au niveau de l'hélice $q_m(r)$ en fonction de ω , c , α , ρ et D (attention aux deux pales).

On pose $q_m(r) = \rho S_R V_R$. En déduire la relation entre V_R , ω , c , α .

Question 10 Compte tenu des pertes de charges dans le bassin, nous avons $V_S = 4V_0$. Donner la relation entre V_S , ω , c , α et faire l'A.N. pour $c = 0,3$ m, $\alpha = 20^\circ$ et $\omega = 100$ tours/min.

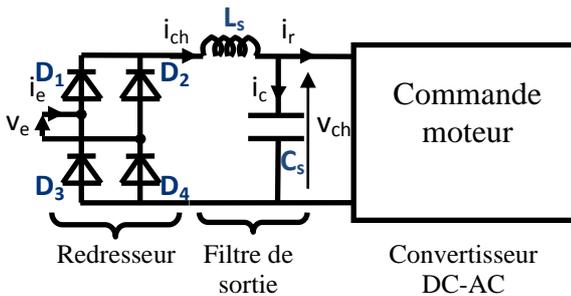
Question 11 Quelle hypothèse non prise en compte dans le modèle explique que la vitesse est supérieure à la valeur $0,35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ souhaitée ?

3. Convertisseur alternatif-continu

Objectif de l'étude : la commande du moteur de l'hélice nécessite de disposer d'une source continue. L'ensemble est alimenté par le réseau EDF (230 V, 50 Hz). Il faut donc un ensemble « redresseur+filtre » pour créer cette alimentation continue. L'objectif est de :

- modéliser le redressement ;
- calculer l'inductance de filtrage permettant de limiter l'ondulation de courant à 5% du courant nominal.

3.1 Présentation et hypothèses



Le réseau EDF fournit une tension
 $V_e(t) = \hat{V} \cdot \sin(\omega t) = V \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$

$$V_e(t) = 230 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314t)$$

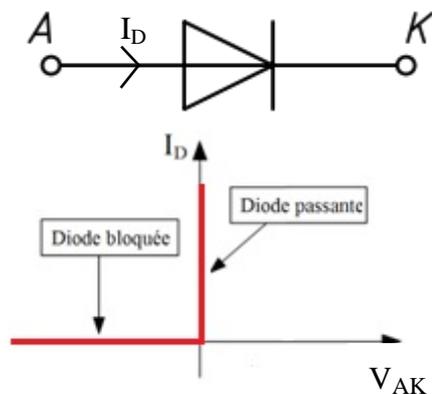
Le pont redresseur va redresser la tension. Le filtre de sortie du redresseur L_s - C_s permet d'obtenir la valeur moyenne de la tension $V_{ch}(t)$ nécessaire pour alimenter la commande du moteur.

Figure 4 : Convertisseur alternatif-continu

3.2 Modélisation du redressement

On considère dans un premier temps l'ondulation de courant négligeable. Le courant i_{ch} est donc constant : $i_{ch} = I_{ch} = 10$ A. Ce courant correspond au courant nominal délivré par le redresseur.

On utilise 4 diodes identiques dont le comportement est donné figure 5 :



Diode bloquée état de la diode quand $V_{AK} < V_{seuil}$, empêchant le passage du courant dans la diode, $I_D = 0$.

Diode passante état de la diode quand $V_{AK} \geq V_{seuil}$, ce qui entraîne $I_D \neq 0$.

Par exemple, dans le montage, les diodes D_1 et D_4 sont passantes lorsque V_e est positive.

Figure 5 : Fonctionnement d'une diode

Question 12 Tracer les chronogrammes des signaux v_{ch} , i_{D1} , i_{D3} , i_e et indiquer pour chaque phase de fonctionnement les diodes qui sont passantes.

Question 13 Les diodes sont considérées comme parfaites, la tension seuil est nulle. Etablir l'expression de la valeur moyenne de v_{ch} en fonction de la valeur efficace de la tension d'entrée V puis sa valeur numérique.

3.3 Modélisation du filtrage

La tension v_{ch} n'étant pas constante, le courant i_{ch} n'est pas constant et présente une ondulation. On souhaite dimensionner l'inductance L_s afin de limiter l'ondulation de courant à 5% du courant nominal ($I_{ch} = 10$ A).

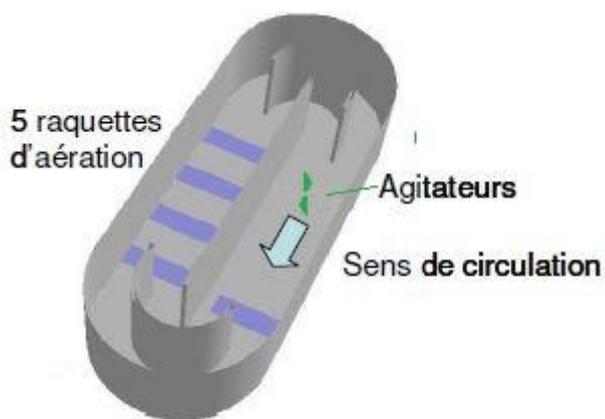
On supposera que la tension aux bornes du condensateur est constante et que le courant i_{ch} est périodique. On propose alors d'utiliser le développement en série de Fourier (en se limitant au premier harmonique) de la tension v_{ch} pour déterminer la valeur de l'inductance L_s . Le développement en série de Fourier de la tension v_{ch} est :

$$V_{ch}(t) = \frac{2V\sqrt{2}}{\pi} \left(1 - \frac{2\cos(2\omega t)}{3} \right)$$

Question 14 Calculer la valeur numérique de l'inductance L_s permettant de limiter l'ondulation de courant à 5% du courant nominal ($I_{ch} = 10$ A).

4. Commande du transfert de l'oxygène

Objectif de l'étude : l'objectif est de comparer la commande asservie et la commande SED (Système à Evènement Discret) de l'agitation afin de maintenir un niveau moyen de $0,035 \text{ kgO}_2 \cdot \text{L}^{-1}$.



L'aérateur permet de transférer un taux constant de $0,04 \text{ kgO}_2 \cdot \text{L}^{-1}$. Il fonctionne en permanence. Il est composé de 5 raquettes d'aération (ou diffuseurs). L'agitation est utilisée pour transférer $0,015 \text{ kgO}_2 \cdot \text{L}^{-1}$ en plus comme le montre la figure 1. Le choix se porte sur une vitesse de fluide de $0,35 \text{ m/s}$

Figure 6 : Aérateur

4.1 Commande SED

4.1.1. Présentation

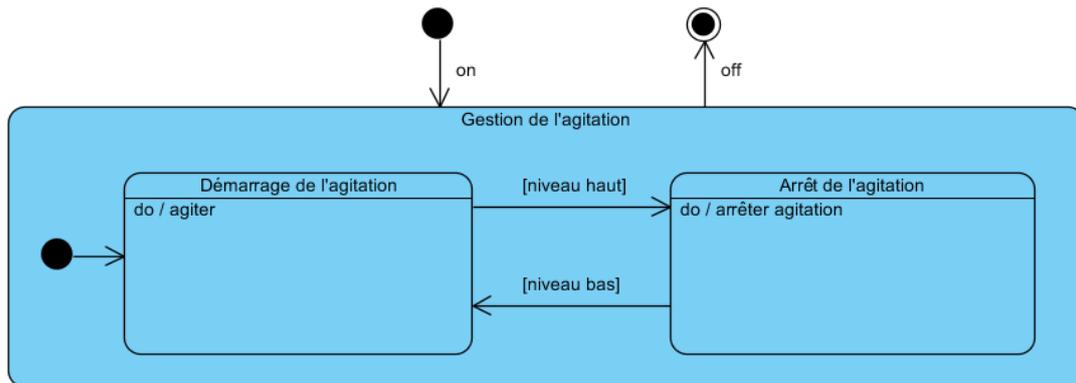


Figure 7 : Graphe d'état de la commande

Après l'appui sur « on », le système va démarrer l'agitation jusqu'à atteindre un niveau haut de $0,06 \text{ kg d'O}_2\cdot\text{L}^{-1}$. Le système s'arrête alors et l'oxygène va se consommer jusqu'à atteindre le niveau bas de $0,05 \text{ kg d'O}_2\cdot\text{L}^{-1}$. L'agitation redémarre. L'appui sur « off » permet de sortir de cet état.

4.1.2. Modélisation de l'agitation

Des essais ont permis de modéliser la relation entre la production d'oxygène et la vitesse du fluide. Le schéma bloc correspondant à la modélisation de cette partie est donné figure 8.

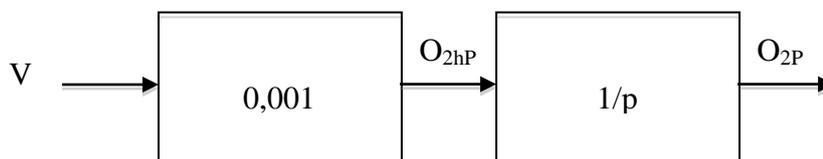


Figure 8 : Schéma bloc du modèle de l'agitation

avec :

- V la vitesse du fluide générée par l'hélice en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (vitesse calculée dans la partie 2 sur l'étude de l'hélice) ;
- O_{2hP} la production horaire d'oxygène en $\text{kg d'O}_2\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$;
- O_{2P} la production d'oxygène en $\text{kg d'O}_2\cdot\text{L}^{-1}$.

Question 15 Déterminer le temps d'agitation nécessaire pour passer de $0,04 \text{ kg d'O}_2\cdot\text{L}^{-1}$ à $0,06 \text{ kg d'O}_2\cdot\text{L}^{-1}$. Compléter le chronogramme du document réponse avec le tracé de cette phase.

4.1.3. Modélisation de la consommation d'oxygène

L'oxygène est consommé en permanence. Là aussi, des essais ont permis de modéliser la consommation d'oxygène dissous par un système d'ordre 1 (Figure 9). Ainsi, l'oxygène restant correspond à l'oxygène produit moins l'oxygène consommé.

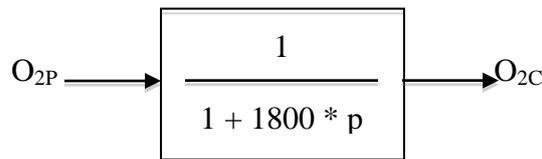


Figure 9 : Schéma bloc de la consommation d'oxygène

avec :

- O_{2P} la production d'oxygène en $\text{kg d'O}_2\cdot\text{L}^{-1}$;
- O_{2C} la consommation d'oxygène en $\text{kg d'O}_2\cdot\text{L}^{-1}$;

Question 16 Déterminer le temps de repos nécessaire pour consommer $0,01 \text{ kg d'O}_2\cdot\text{L}^{-1}$. Compléter le chronogramme du document réponse.

Question 17 Compléter le chronogramme avec deux autres cycles agitation repos.

Question 18 A partir du graphique, vérifier si le niveau d'oxygène moyen est bien de $0,055 \text{ kg d'O}_2\cdot\text{L}^{-1}$.

Question 19 Estimer le temps de fonctionnement de l'agitateur sur 3 cycles. Sachant que le moteur utilisé à une puissance de 2 kW et un rendement de 90% à cette vitesse, calculer l'énergie dépensée sur 3 cycles.

4.2 Asservissement en vitesse de l'hélice

Objectif de l'étude : l'objectif est de maîtriser la vitesse de l'hélice.

Critères	valeurs
Précision statique	nulle
Temps de réponse à 5%	1 s maxi
Dépassement	10% maxi
Marge de phase	45°
Marge de gain	12 dB

La rotation de l'hélice est obtenue avec une machine asynchrone commandée par contrôle direct du couple (Direct Torque Control). Ce système peut être modélisé par un système linéaire (autour d'un point de fonctionnement) ayant comme entrée la référence couple et comme sortie la vitesse.

Le schéma blocs de l'ensemble est donné figure 10 :

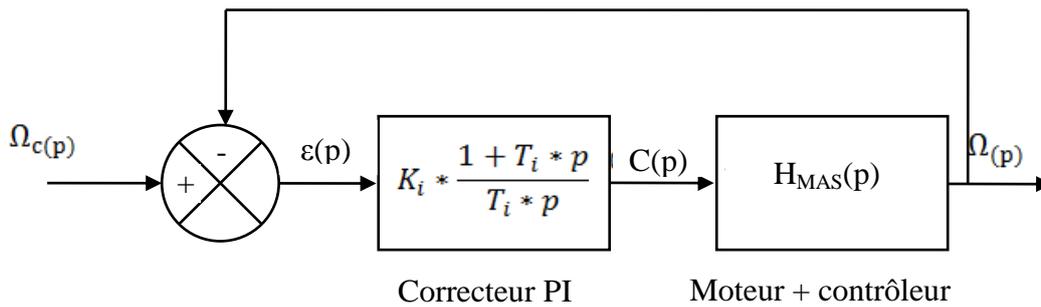


Figure 10 : Schéma bloc de l'ensemble

Un essai en boucle ouverte pour un échelon de 10 N.m a permis de tracer la caractéristique de la figure 11.

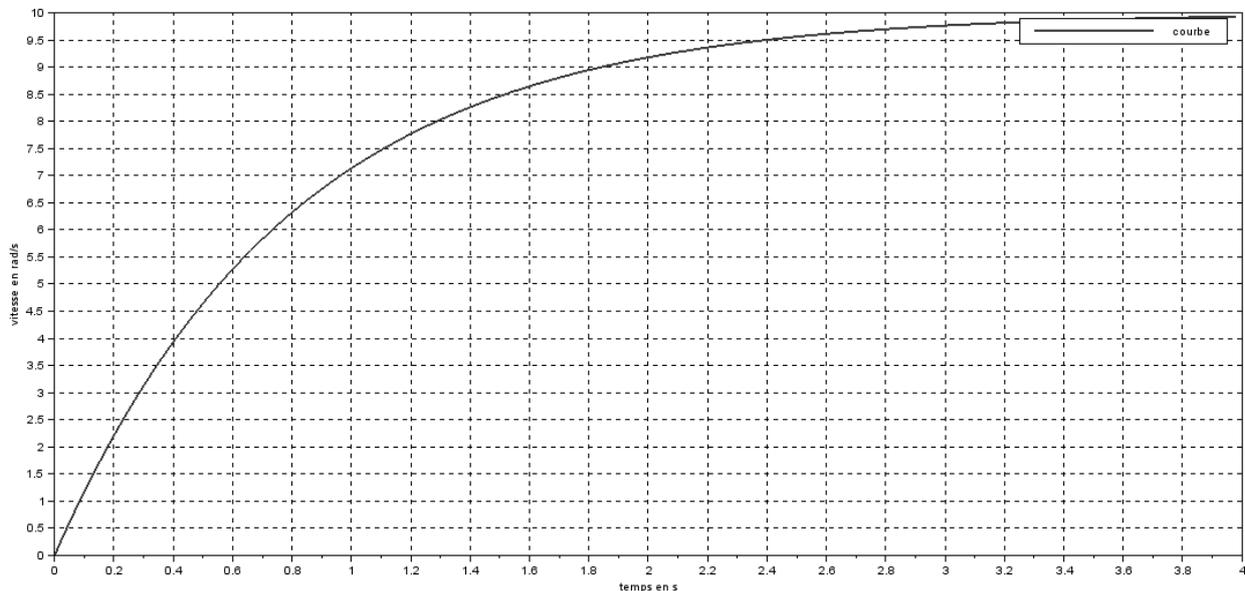


Figure 11 : Réponse en boucle ouverte à un échelon de 10 N.m

Question 20 Identifier la fonction de transfert $H_{MAS}(p)$. Calculer la précision du système non corrigé et justifier la forme du correcteur.

Question 21 Choisir T_i afin de compenser le pôle dominant. Calculer la Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) de la fonction ainsi obtenue et calculer K_i pour avoir un temps de réponse à 5% de 1 s.

Question 22 Vérifier le critère de stabilité.

4.3 Commande asservie en oxygène de l'agitation

Objectif : l'objectif est de modéliser la commande de l'agitateur afin d'obtenir la puissance dissipée. Elle pourra être comparée à la commande SED.

4.3.1. Retour d'information du capteur d'oxygène

Objectif de l'étude : amplifier le signal du capteur d'oxygène afin d'atteindre un niveau de 5 V en entrée d'un microcontrôleur.

La caractéristique de la sonde d'oxygène est donnée figure 12 :

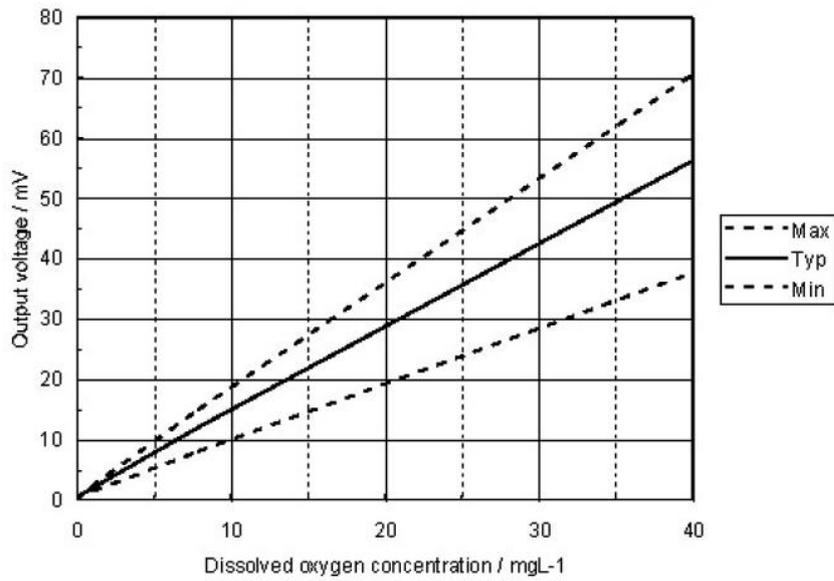


Figure 12 : Caractéristique de la sonde d'oxygène

Afin d'être compatible avec l'électronique de commande, le niveau de ce signal doit atteindre 5 V pour une concentration de 40 mg.L⁻¹. Le signal est amplifié par un amplificateur d'instrumentation à base d'amplificateurs linéaires intégrés (ALI) alimentés en +15 V/-15 V et supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire (Figure 13).

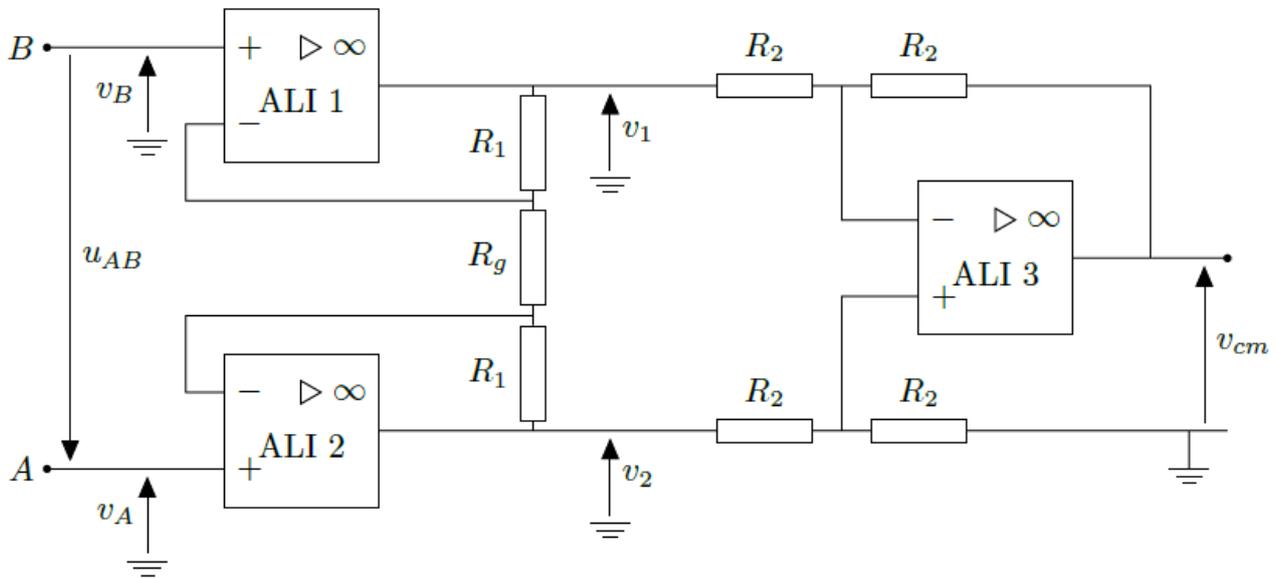


Figure 13 : Amplificateur d'instrumentation

Question 23 Déterminer d'une part la relation entre $v_{cm}(t)$, $v_1(t)$ et $v_2(t)$ puis, d'autre part la relation entre $u_{AB}(t)$, $v_1(t)$ et $v_2(t)$. En déduire l'expression littérale de l'amplification du montage.

On donne $R_1 = 24,7 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$.

Question 24 Calculer la valeur numérique R_g qui permet de respecter la tension de sortie de 5 V.

4.3.2. Modélisation Système Linéaire Continu et Invariant (SLCI)

Le schéma bloc est donné sur la figure 14 :

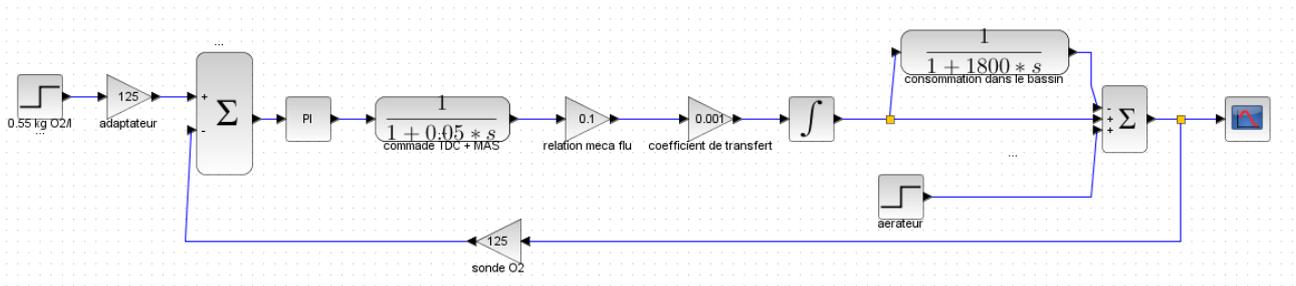


Figure 14 : Schéma bloc du système

Question 25 La réponse du système non corrigé à une entrée échelon de $0,55 \text{ kg d'O}_2 \cdot \text{L}^{-1}$ est donnée figure 15. Mesurer les performances.

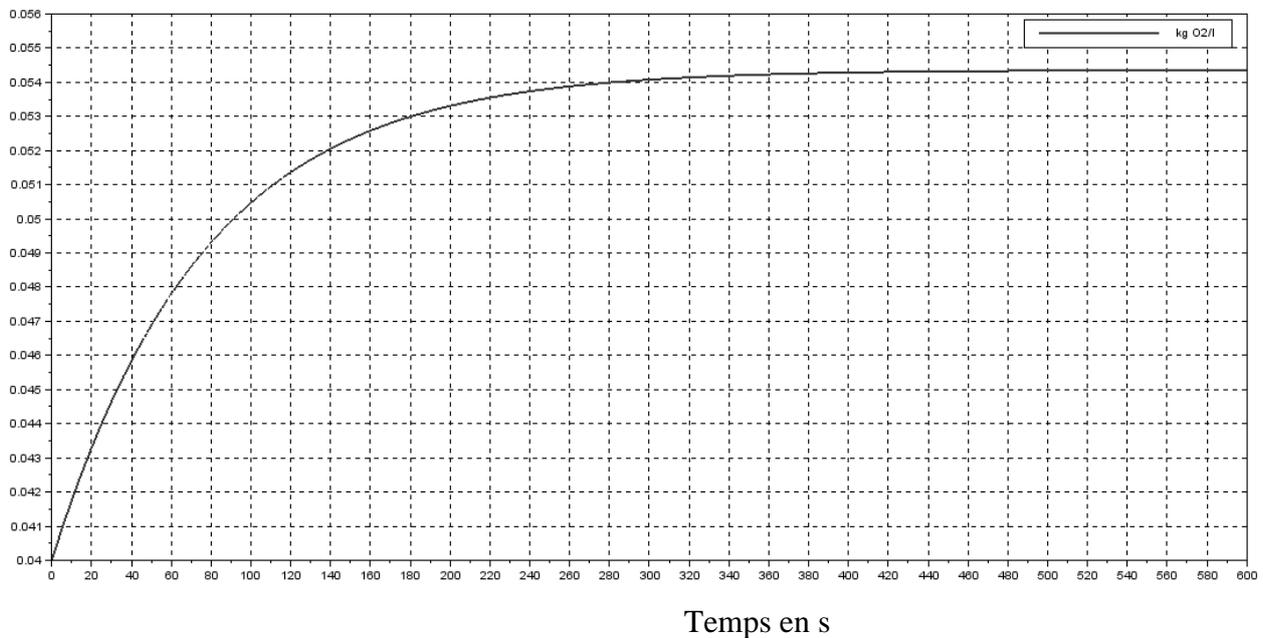


Figure 15 : Réponse du système non corrigé

Une fois le correcteur réglé, la courbe qui donne l'évolution de la vitesse du fluide est représentée sur la figure 16.

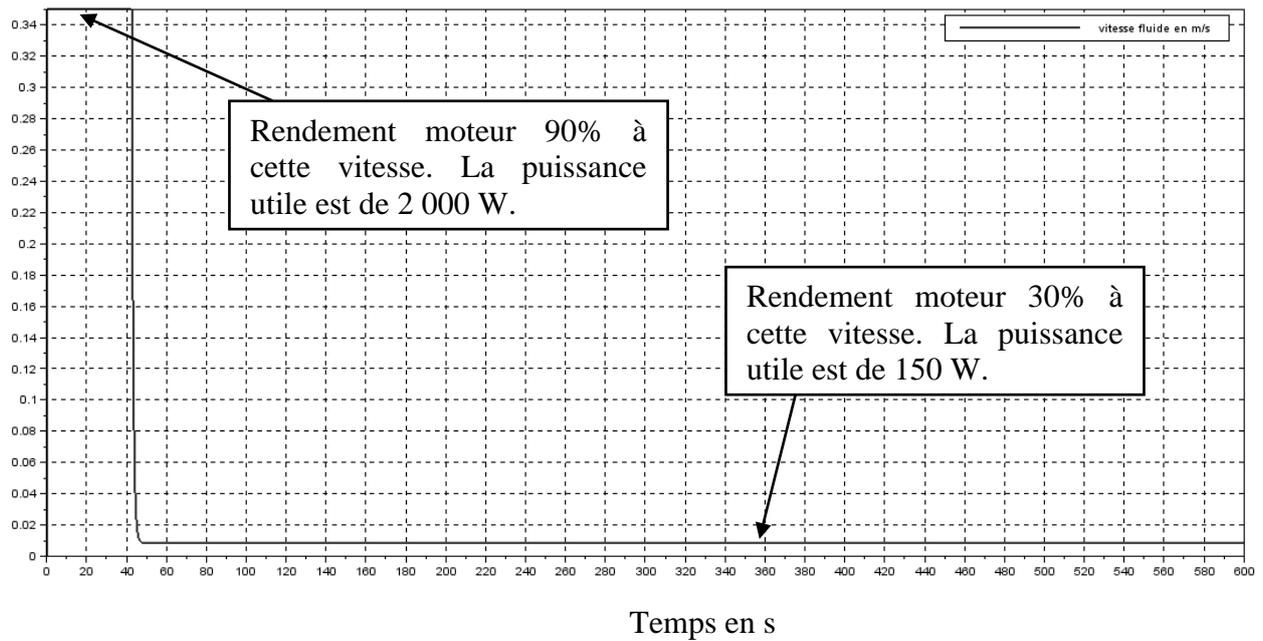


Figure 16 : Evolution de la vitesse du fluide

Question 26 Sachant que le moteur utilisé à une puissance de 2 kW, estimer l'énergie dépensée sur un cycle de 3 800 s comme pour la commande SED.

Question 27 Conclure sur la commande la moins énergivore.

5. Récupération de l'énergie contenue dans les boues par méthanisation

La méthanisation est le processus de transformation de la matière organique en biogaz. Ce biogaz est essentiellement composé de méthane et de gaz carbonique. Elle est réalisée en anaérobiose grâce à l'action d'une flore bactérienne complexe. Elle présente le double avantage de traiter les déchets organiques tout en produisant une source d'énergie valorisable. Le processus est décrit par le schéma de la figure 17 :

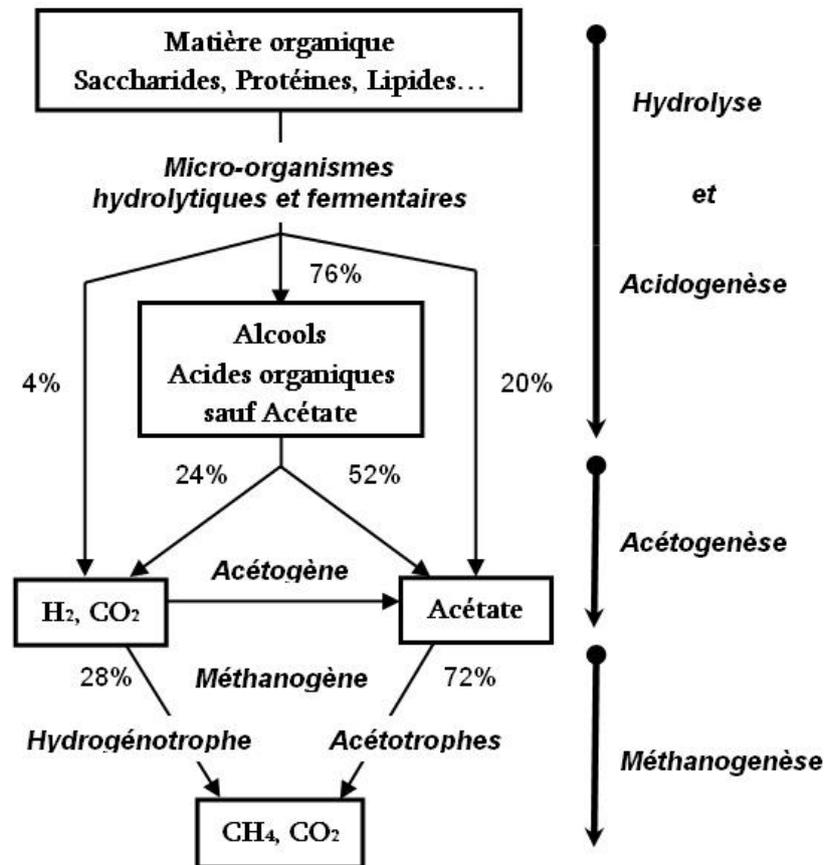
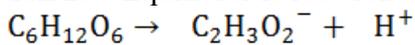
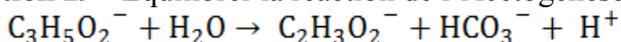


Figure 17 : Processus de méthanisation

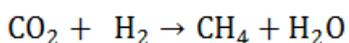
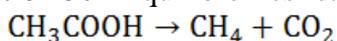
Question 28 Equilibrer la réaction de l'Acidogénèse



Question 29 Equilibrer la réaction de l'Acétogénèse



Question 30 Equilibrer les réactions de Méthanogénèse



6. Récupération de l'énergie thermique des eaux usées

Problématique : l'objectif est d'élaborer un modèle numérique permettant de prédire la récupération de chaleur potentielle des collecteurs d'eaux usées.

6.1 Contexte de la modélisation

La récupération de chaleur des eaux usées dans les collecteurs est un système en devenir. Il y a actuellement en France quatre installations de ce type. L'idée consiste à placer des échangeurs à l'intérieur des collecteurs (Figure 18).



Par exemple, un échangeur de 84 m avec un débit de 33 L.s^{-1} est installé à Valenciennes (France). Il apporte 77% des besoins énergétiques de l'hôtel de ville (bâtiment de $8\,500 \text{ m}^2$).

Figure 18 : système de récupération de chaleur des eaux usées

Ce système a l'avantage de pouvoir se situer à proximité des preneurs de chaleur. Les collecteurs principaux présentent dans la plupart des cas un potentiel intéressant de récupération et une pompe à chaleur permet d'augmenter l'énergie calorifique fournie par les échangeurs.

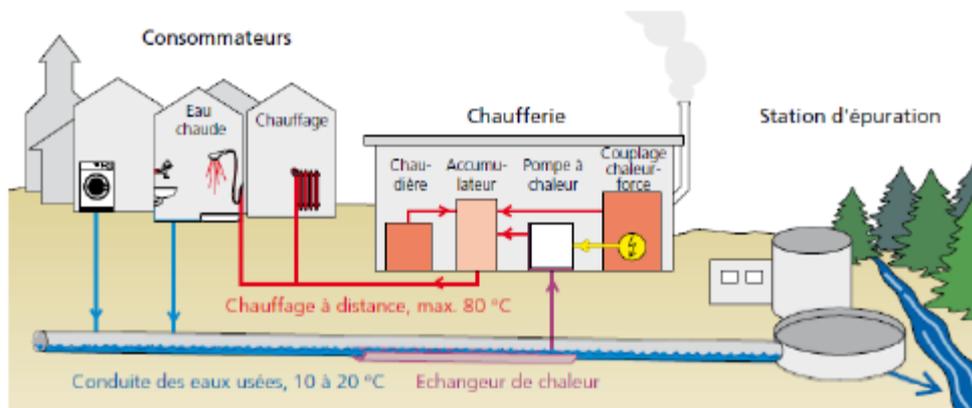


Figure 19 : Récupération de chaleur dans les collecteurs (Source : SuisseEnergie)

Le potentiel d'extraction de chaleur est donné par $P_{\text{ext}} = q_m \cdot C_p \cdot \Delta T$ avec :

P_{ext} : Puissance extraite [W],

q_m : Débit massique de l'eau [kg.s^{-1}] pour une eau entre 0°C et 20°C ,

C_p : Capacité thermique massique de l'eau = $4186 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ pour une eau entre 0°C et 20°C ,

ΔT : Variation de température dans l'échangeur (en moyenne de 1°C dans les installations en France).

Cette puissance extraite P_{ext} est transformée en puissance thermique P_{th} par une pompe à chaleur avec généralement un coefficient de performance annuel COPA de 3,5.

$$P_{th} = P_{ext} / \left(1 - \left(\frac{1}{COPA} \right) \right)$$

Question 31 Calculer la puissance thermique récupérée dans le cas de l'installation de la mairie de Valenciennes.

6.2 Modélisation de l'échangeur thermique

6.2.1. Hypothèses et paramétrage

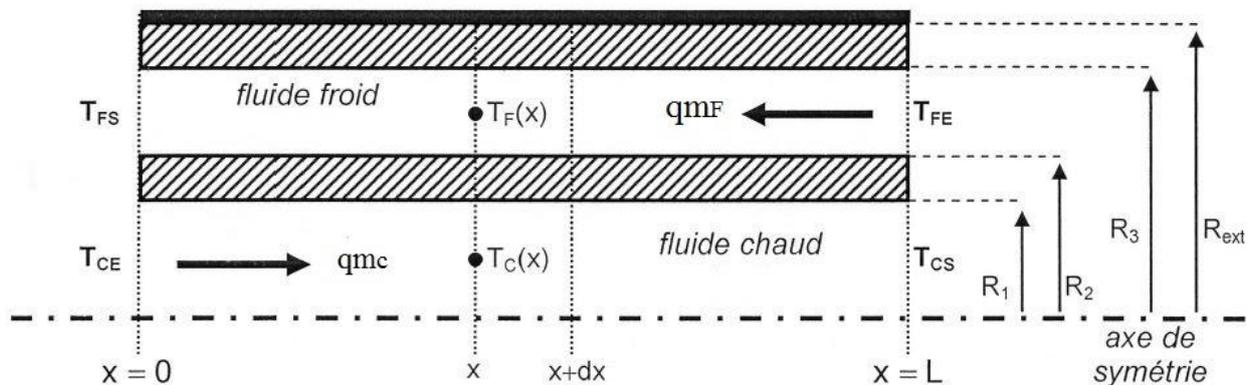


Figure 20 : Echangeur thermique

L'échangeur de chaleur permet de transférer un flux de chaleur d'un fluide chaud à un fluide froid à travers une paroi, sans contact direct entre les deux fluides. Les eaux usées étant entre 10 C et 20°C toute l'année, elles serviront pour la climatisation l'été et le chauffage l'hiver.

L'étude se fait pour la climatisation. Les eaux usées viennent refroidir le fluide à l'intérieur des tubes.

Pour une approche simple, nous modélisons un des deux modules par deux cylindres concentriques coaxiaux, de longueur L, réalisés en aluminium (conductivité thermique λ_{alu}). Le premier de rayon interne R_1 et de rayon externe R_2 dans lequel circule le fluide chaud (indiqué C), le second de rayon interne R_3 et de rayon externe R_{ext} calorifugé. Le fluide froid (indiqué F) circule à **contre courant** dans l'espace compris entre les deux tubes.

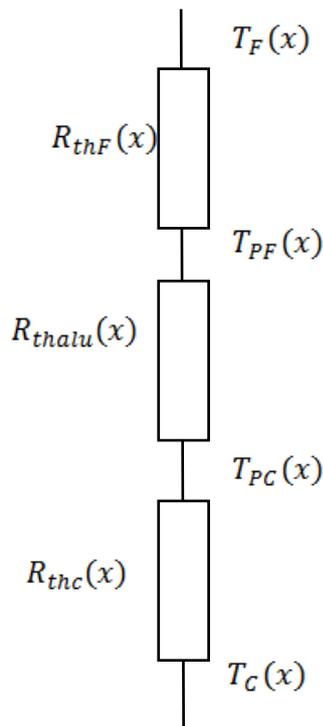
Dans l'étude proposée, les hypothèses suivantes sont retenues :

- le régime d'écoulement des fluides est supposé permanent ;
- l'échangeur est considéré comme adiabatique ;
- aucun changement de phase n'intervient au cours du transfert ;
- l'écoulement ne subit aucune perte de pression entre l'entrée et la sortie de l'échangeur ;
- les propriétés thermophysiques de l'eau restent constantes dans les intervalles de températures envisagés (conductivité thermique λ_{eau} , capacité thermique massique C_{eau} , masse volumique ρ_{eau} , ...)

- les températures dans le fluide ne varient que dans la seule direction de l'écoulement ; en un point de l'abscisse x de l'échangeur, elles seront notées $T_C(x)$ et $T_F(x)$ pour les fluides et $T_{PC}(x)$ et $T_{PF}(x)$ pour les parois d'échange au contact des deux fluides ;
- les températures T_{CE}, T_{FE}, T_{CS} et T_{FS} désignent respectivement les températures des deux fluides en entrée et sortie de l'échangeur ;
- entre les parois R_1 et R_2 les transferts thermiques axiaux sont négligés ;
- les coefficients de transfert conducto-convectifs aux parois, moyennés sur la longueur L de l'échangeur et notés respectivement h_c et h_f , répondent à la loi de Newton, qui s'écrit $d\phi_{cc} = h[T_{paroi} - T_{fluide}]dS$;
- les débits massiques dans un module sont notés respectivement qm_c et qm_f .

6.2.2. Détermination du coefficient global de transfert du module d'échange

Objectif : afin de simplifier l'étude du module d'échange, cette partie vise à globaliser les transferts conductifs et conducto-convectifs entre les tubes par une conductance thermique équivalente K par unité de longueur, telle que le flux échangé entre celui-ci s'écrit : $d\phi_p = K[T_C(x) - T_F(x)]dx$ pour une longueur élémentaire dx . Les résistances thermiques sont définies par unité de longueur du module d'échange.



La figure 20 donne l'analogie électrique du transfert thermique dans lequel le courant est analogue au flux et la tension analogue à la différence de température.

La conductance est l'inverse de la résistance. On notera ainsi

$$\lambda_{thF}(x) = \frac{1}{R_{thF}(x)} ; \lambda_{thalu}(x) = \frac{1}{R_{thalu}(x)} ; \lambda_{thc}(x) = \frac{1}{R_{thc}(x)}$$

Question 32 Ecrire la relation entre flux, températures ($T_C(x)$, $T_F(x)$, $T_{pC}(x)$ et $T_{pF}(x)$) et résistances thermiques (R_{thC} , R_{thalu} et R_{thF}).

Figure 20 : Analogie électrique

Considérons au sein du tube intérieur, un élément cylindrique de rayon intérieur r , de rayon extérieur $r + dr$ et de longueur élémentaire dx .

Question 33 Réaliser un bilan thermique sur cet élément. En déduire que la conductance linéique thermique du tube intérieur, associé au transfert conductif s'écrit :

$$\lambda_{thalu} = \frac{2\pi\lambda_{alu}}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Question 34 Déterminer les conductances linéiques thermiques λ_{thC} et λ_{thF} , associées aux échanges conducto-convectifs entre le tube intérieur et les fluides.

Question 35 Etablir l'expression de la conductance thermique K, par unité de longueur en fonction de $h_C, h_F, R_1, R_2, \lambda_{alu}$.

6.2.3. Bilan thermique du module d'échange

On pose le flux thermique échangé ϕ est donné par $\phi = qm \cdot C_p \cdot \Delta T$.

Question 36 Ecrire la relation entre $d_{mc}, T_{CE}, T_C(x), q_{mF}, T_{FS}, T_F(x)$ qui traduit que toute la chaleur perdue par le fluide chaud entre $x=0$ et x est intégralement transmise au fluide froid.

Question 37 En déduire l'expression de $T_F(x) = f(q_{mc}, T_{CE}, T_C(x), q_{mF}, T_{FE})$

Considérons une tranche (longueur dx) du module d'échange, comprise entre les abscisses x et $x+dx$.

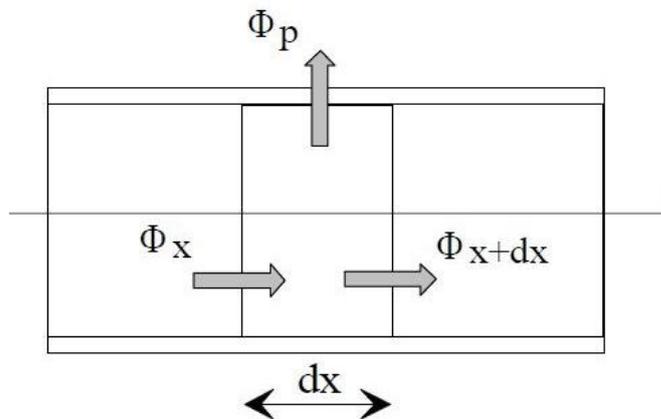


Figure 21 : module d'échange

Question 38 Ecrire la relation entre $q_{mc}, K, T_C(x), C_p, T_F(x), dT_C(x)$ qui traduit que toute la chaleur perdue par le fluide chaud entre x et $x+dx$ est intégralement passée à travers la paroi de séparation des deux fluides.

En utilisant les relations des deux dernières équations et en intégrant, on montre la relation suivante qui est généralement utilisée par les thermiciens (démonstration non demandée)

$$q_{mc}[T_{CE} - T_{CS}] = KS \frac{[T_{CS} - T_{FE}] - [T_{CE} - T_{FS}]}{\ln\left(\frac{T_{CS} - T_{FE}}{T_{CE} - T_{FS}}\right)}$$

6.3 Résolution numérique

La partie précédente a permis de mettre en place un modèle de l'échangeur sous forme différentielle et sous forme intégrée.

Rappel des équations issues de la modélisation :

Forme différentielle :

$$q_{mc} \frac{dT_c}{dx} = KS[T_c - T_f]$$

$$q_{mf} \frac{dT_f}{dx} = KS[T_f - T_c]$$

Forme intégrée :

$$q_{mc}[T_{CE} - T_{CS}] = q_{mF}[T_{FS} - T_{FE}]$$

$$q_{mc}[T_{CE} - T_{CS}] = KS \frac{[T_{CS} - T_{FE}] - [T_{CE} - T_{FS}]}{\ln\left(\frac{T_{CS} - T_{FE}}{T_{CE} - T_{FS}}\right)}$$

Une première étude consiste à déterminer la distance nécessaire pour élever le fluide caloripporteur de 1°C. Pour cela, il est nécessaire de résoudre le système d'équations différentielles.

On fait le choix de le résoudre par une méthode d'Euler explicite. La longueur de l'échangeur est divisée en portions de longueur dx et on cherche à déterminer les températures des deux fluides sur chaque portion.

On notera T_{c0} la température initiale du fluide c et T_{f0} la température initiale du fluide f.

On notera T_{ck} la température à la fin de la portion k du fluide c et T_{fk} la température à la fin de la portion k du fluide f.

Question 39 Ecrire les deux relations de récurrence de $T_{c_{k+1}}$ et $T_{f_{k+1}}$ en fonction de T_{ck} et T_{fk} et des constantes du problème.

Les constantes du problème sont :

$$K = 350 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$$

$$q_{mc} = q_{mf} = 7,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg.s}^{-1}$$

$$T_{c0} = 16 \text{ °C}$$

$$T_{f0} = 8 \text{ °C}$$

$$S = 0,6 \text{ m}^2$$

Question 40 Appliquer la relation de récurrence pour déterminer T_{c1} et T_{f1} .

La simulation numérique est réalisée pour différentes discrétisations spatiales de l'échangeur, sur une longueur arbitraire de 1500 m.

Les courbes résultats de la simulation sont données sur la figure 22.

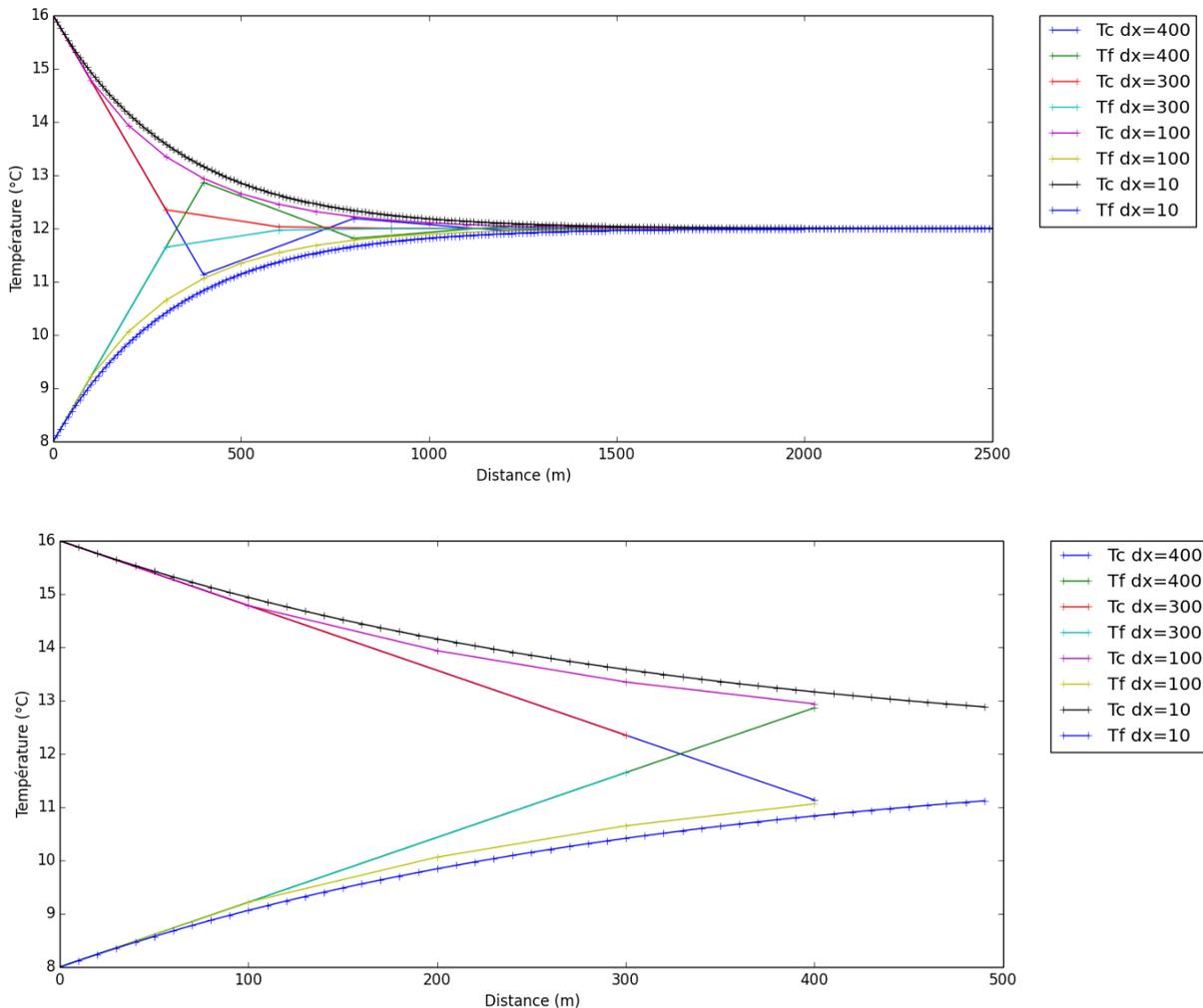


Figure 22 : Courbes résultats de simulation

Les résultats sont attendus avec une précision de l'ordre de 10% étant données les hypothèses réalisées pour obtenir le modèle. On peut supposer que la discrétisation avec des éléments de 10 m est une solution de référence.

Question 41 Expliquer les phénomènes numériques qui apparaissent pour des discrétisations grossières. Puis choisir une discrétisation.

Question 42 Justifier à partir des courbes que le système ne présente aucun intérêt dans le cas d'un échangeur d'une très grande taille. Donner une approximation de la taille limite.

Question 43 En pratique, le système doit être conçu pour réaliser une élévation de température de 1°C. Donner la taille minimale que doit faire l'échangeur.

Question 44 Le schéma ci-après, basé sur une étude de la région PACA, donne l'implantation d'un des collecteurs de la ville de Marseille. Calculer la longueur du collecteur et en déduire le nombre d'échangeurs à placer ainsi que la puissance extraite. On se placera dans les mêmes conditions de débit que la ville de Valenciennes.



En pratique, les thermiciens qui dimensionnent les installations travaillent sur les équations sous forme intégrée.

Il s'agit d'un système de deux équations non linéaires à deux inconnues T_1 s et T_2 s. Pour résoudre ce système, on se propose de mettre le problème sous la forme $F(t) = 0$ avec F une fonction vectorielle de dimension \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On notera F_1 la première composante et F_2 la seconde. On notera t_1 la première composante du vecteur inconnue t et t_2 la seconde.

Question 45 Proposer une définition de F en veillant bien à ce qu'elle soit définie pour tout T_1 s et T_2 s telle que $T_1 < T_2$.

On se propose de déterminer la solution à l'aide d'un algorithme de Newton.

Question 46 Rappeler la méthode pour une fonction à une variable.

Pour une fonction à plusieurs variables, il faut remplacer la dérivée de la fonction par un opérateur tangent que l'on notera Ft.

Ft sera une matrice de dimensions 2x2 dont les termes sont $Ft(i,j) = \frac{\partial F_i(t)}{\partial t_j}$.

Question 47 Par analogie avec la méthode de Newton pour les fonctions à une variable, écrire le problème à résoudre pour une fonction à deux variables.

Question 48 L'opérateur tangent étant difficile à calculer analytiquement, proposer une méthode basée sur la dérivation numérique permettant d'obtenir une approximation.

On donne ci-dessous quelques résultats issus de la résolution par la méthode de Newton pour différentes longueurs d'échangeur.

L	Tcs	Tfs
100	14,85	9,05
200	14,18	9,82
500	12,87	11,13
1000	12,19	11,81
2000	12,01	11,99

Question 49 Les valeurs obtenues par cette nouvelle méthode sont-elles cohérentes avec la méthode basée sur la résolution des équations différentielles ?

Fin du problème

DOCUMENT RÉPONSE

