L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

• L'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base.

• Les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur.

• L'aptitude à savoir manipuler sa calculatrice.

Toutefois celle-ci ne sera pas nécessairement autorisée aux deux épreuves.

• Le soin apporté à la présentation de son travail.

En particulier les résultats doivent être mis en évidence (encadrés ou soulignés).

UN CANDIDAT DE NIVEAU MOYEN ET QUI A TRAVAILLÉ DOIT POUVOIR OBTENIR LA MOYENNE AU MOINS.

Calculatrices autorisées

Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème, tous indépendants.

Exercice 1 : algorithmique en Python et Scilab

Le code doit être écrit en langage Python (ou Scilab). En particulier, on prendra soin de bien respecter l'indentation.

1. Écrire une fonction factorielle qui prend en argument un entier naturel n et renvoie $n!$ (on n'acceptera pas bien sûr de réponse utilisant la propre fonction factorielle du module math de Python ou Scilab).
2. Écrire une fonction seuil qui prend en argument un entier M et renvoie le plus petit entier naturel n tel que $n! > M$.
3. Écrire une fonction booléenne nommée est_divisible, qui prend en argument un entier naturel n et renvoie True si $n!$ est divisible par $n+1$ et False sinon.
4. On considère la fonction suivante nommée mystere :

```
def mystere(n) :
    s = 0
    for k in range(1,n+1):
        s = s + factorielle(k)
    return s
```

   (a) Quelle valeur renvoie mystere(4) ?

   (b) Déterminer le nombre de multiplications qu'effectue mystere(n).

   (c) Proposer une amélioration du script de la fonction mystere afin d'obtenir une complexité linéaire.

Exercice 2 : matrice de transition

On note la matrice $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Démontrer que la matrice A est diagonalisable et en déduire l'expression, pour tout entier naturel n de la matrice A^n.
   On pourra utiliser la calculatrice.
   (b) On considère trois suites de réels (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$ et les relations de récurrence valables pour pour tout entier naturel n :
   $$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{4}v_n \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + w_n \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \end{cases}$$
   déterminer l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

2. Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante

   si à l'instant n il est sur A alors à l'instant $n+1$ il est sur B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ ou sur C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$

   si à l'instant n il est sur B alors à l'instant $n+1$ il est sur A avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ ou sur C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$

   si à l'instant n il est sur C alors à l'instant $n+1$ il est sur B

   On note A_n l'évènement " le mobile se trouve en A à l'instant n", B_n l'évènement " le mobile se trouve en B l'instant n" et C_n l'évènement " le mobile se trouve en C à l'instant n"

   Enfin le mobile commence son trajet en partant du point A.

   On note, pour tout entier naturel n, $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$

   (a) Justifier que $P(C_2) = \frac{3}{16}$.
   (b) Déterminer, en les justifiant, des relations de récurrence entre a_{n+1}, b_{n+1} , c_{n+1} et a_n, b_n, c_n .
   (c) Déterminer la limite en l'infini des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Exercice 3 : une famille sommable

Dans cet exercice, z est un nombre complexe tel que $|z| < 2$ et $(u_{n,p})$ est une famille de nombres complexes définie pour n et p entiers naturels, $n \geq 2$, $p \geq 2$ par : $u_{n,p} = \frac{z^n}{p^n}$.

On pose pour tout réel $x \in]1, +\infty[$, $\varsigma(x) = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x}$.

L'objectif de cet exercice est de calculer la somme : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (\varsigma(n) - 1)$.

1. (a) Justifier que, pour tout $p \geq 2$, la série $\sum\limits_{n \geq 2} u_{n,p}$ est absolument convergente et calculer $S_p = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{z^n}{p^n}\right|$.
   (b) En déduire que la famille $(u_{n,p})$ de nombres complexes est sommable.

2. (a) Démontrer que $\sum\limits_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p(p-z)} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} z^n (\varsigma(n) - 1)$.
   (b) En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (\varsigma(n) - 1)$.

Problème : comparaison de convergences

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Première partie

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I.

1. (a) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

   (b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I.

2. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

   On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.

3. On pose pour $x \in [0,\, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2+n}{n^2}\right)$.

   Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0,\, 1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0,\, 1]$.

4. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I?

   On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série entière.

Deuxième partie

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de réels postifs, $I = [0, 1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n\, x^n(1-x)$.

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I.

6. (a) Calculer pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

   (b) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si, la série de réels positifs $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.

7. (a) Calculer pour tout $x \in I$, $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

(b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I .

On pourra observer que pour $k \geq n+1$, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.

(c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

8. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels postifs $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que :

(a) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur I .

(b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I .

(c) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

9. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I.