CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de 2 problèmes indépendants qui peuvent être traités dans un ordre choisi par le candidat.

PROBLÈME 1

On note $\mathcal{V}_d^2$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes X, définies sur un espace probabilisé Ω muni d'une probabilité P, telle que $E(X^2)$ existe. Lorsqu'une variable aléatoire réelle discrète X appartient à $\mathcal{V}_d^2$, on dit alors que X admet un moment d'ordre 2.

Partie I - Étude de l'ensemble des variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2

I.1 - Exemple simple

Soit V une variable aléatoire sur Ω suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

Q1. Rappeler la loi de Bernoulli de paramètre p.

Q2. Montrer que V appartient à $\mathcal{V}_d^2$.

I.2 - Cadre général

Soient X et Y deux variables aléatoires de $\mathcal{V}_d^2$ ayant respectivement pour ensemble image $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ avec pour tout entier i, x_i dans $\mathbb{R}$ et tout entier j, y_j dans $\mathbb{R}$. On note :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = r_{ij}, \\ P([X = x_i]) = p_i, \\ P([Y = y_j]) = q_j. \end{cases}$$

Q3. Quelle(s) condition(s) doi(ven)t vérifier X et Y pour que $r_{ij} = p_i \times q_j$?

Q4. Exprimer $E(X^2)$ en fonction de p_i et de x_i.
Proposer une formulation équivalente pour $E(Y^2)$.

Q5. Montrer que pour tout i dans $\mathbb{N}$, $p_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} r_{ij}$. En déduire que $E(X^2) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} r_{ij}x_i^2$.

De la même manière, montrer que $E(Y^2) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} r_{ij}y_i^2$.

Q6. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Q7. Pour cette question, on admettra le résultat suivant :

Si Z et T sont deux variables aléatoires réelles telles que Z est d'espérance finie et $\forall \omega \in \Omega$, $|T(\omega)| \leq Z(\omega)$, alors T est d'espérance finie et $E(T) \leq E(Z)$.

Montrer que l'espérance de la variable produit XY existe et que :

$$E(XY) \leq \frac{1}{2}\left(E(X^2) + E(Y^2)\right).$$

Q8. À l'aide de la question précédente, montrer que $\mathcal{V}_d^2$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires réelles sur Ω.

I.3 - Artifice de calcul : utilisation de la loi certaine

Sur l'espace Ω muni de la probabilité P, on considère Z une variable aléatoire certaine égale à 1.

Q9. Donner l'ensemble image de Z et sa loi.

Q10. Calculer $E(Z^2)$ et en déduire que Z appartient à $\mathcal{V}_d^2$.

Q11. Déduire des questions **Q7** et **Q10** que si $X \in \mathcal{V}_d^2$ alors X admet une espérance et que :

$$E(X) \leq \frac{1}{2}\left(1 + E(X^2)\right).$$

Q12. Dans le cas de deux variables aléatoires *finies* X et Y, on rappelle que la covariance de X et Y est définie par $\text{cov}(X, Y) = E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big)$. Montrer que :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \tag{1}$$

Q13. Pour $(X, Y) \in (\mathcal{V}_d^2)^2$, on définit, si elle existe, la covariance de X et Y par la formule (1).
Déduire des questions précédentes que si $(X, Y) \in (\mathcal{V}_d^2)^2$, alors X et Y admettent une variance et que leur covariance $\text{cov}(X, Y)$ existe.

Partie II - Étude de la matrice de covariance

Soient $V_1, V_2, V_3 \in \mathcal{V}_d^2$, on définit K, la matrice de covariance des variables aléatoires V_1, V_2, V_3, comme la matrice carrée d'ordre 3 avec $K = (k_{i,j})$ où pour tout $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, $k_{i,j} = \mathrm{cov}(V_i, V_j)$.

II.1 - Étude d'un exemple

On suppose uniquement dans cette sous-partie, que les trois variables aléatoires V_1, V_2 et V_3 sont à valeurs dans $\{0, 1\}$ et qu'elles vérifient les conditions suivantes :

il existe $p_1, p_2, p_3 \in]0, 1[$ tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et

$$P([V_1 = i] \cap [V_2 = j] \cap [V_3 = k]) = \begin{cases} p_1 & \text{si } j = k = 1,\ i = 0, \\ p_2 & \text{si } i = k = 1,\ j = 0, \\ p_3 & \text{si } i = j = 1,\ k = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Q14. Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des variables de Bernoulli respectivement de paramètres $1 - p_1$, $1 - p_2$ et $1 - p_3$.

Q15. On pose $S = V_1 + V_2 + V_3$, calculer $P(S = 2)$ et en déduire la variance de S.

Q16. Montrer que $\mathrm{cov}(V_1, V_2) = -p_1 p_2$ et $\mathrm{var}(V_1) = p_1(1 - p_1)$.

Q17. Vérifier que la matrice K est égale à $\begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & -p_1p_3 \\ -p_1p_2 & p_2(1-p_2) & -p_2p_3 \\ -p_1p_3 & -p_2p_3 & p_3(1-p_3) \end{pmatrix}$.

Réduction de la matrice K dans un cas particulier

Q18. Montrer que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice K associé à la valeur propre 0.

Q19. Déterminer le rang de K puis son noyau.

Q20. On suppose de plus que $p_2 = p_3 = p$. Exprimer K uniquement en fonction de p, puis montrer que p est une valeur propre de K et préciser la dimension de l'espace propre.

Q21. Toujours dans le cas où $p_2 = p_3 = p$, et en utilisant la trace de K, déterminer toutes les valeurs propres de K et donner son polynôme caractéristique.

II.2 - Retour au cas général

On se place maintenant dans le cas général : V_1, V_2 et V_3 sont trois variables aléatoires discrètes de $\mathcal{V}_2^d$ quelconques. On rappelle que la matrice K est la matrice carrée d'ordre 3 dont le coefficient placé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est $\mathrm{cov}(V_i, V_j)$, avec la définition de la covariance vue à la question **Q12**.

Q22. Montrer que K est une matrice symétrique ; en déduire qu'elle est diagonalisable.

Q23. En calculant la variance de la variable aléatoire $W = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3$, montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\sum_{1\leq i,j\leq 3} x_i x_j \,\mathrm{cov}(V_i, V_j) \geq 0. \tag{3}$$

Q24. Montrer que la relation (3) peut s'écrire sous la forme

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad {}^tXKX \geq 0.$$

En déduire que les valeurs propres de K sont positives ou nulles.

PROBLÈME 2

Le problème est composé de trois parties qui ne sont pas indépendantes. On pourra admettre les résultats des questions de ce problème en les précisant dans la copie.

Étant donné un réel μ, on considère l'équation différentielle (E_μ) suivante :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0 \qquad (E_\mu)$$

dont on cherche des fonctions solutions y sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Partie I - Résolution dans le cas où $\mu = 0$

Dans cette partie, on suppose $\mu = 0$, on cherche donc à résoudre sur $]0, 1[$, l'équation

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' = 0. \qquad (E_0)$$

Q25. Soit $f : x \mapsto \arcsin(2x - 1)$. Montrer que f est définie et continue sur le segment $[0, 1]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et que :

$$\forall x \in \,]0, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}.$$

Q26. Montrer que toute fonction constante sur $]0, 1[$ est solution de (E_0).

Q27. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\dfrac{16x - 8}{16(x^2 - x)} = \dfrac{1/2}{x} + \dfrac{1/2}{x - 1}$.

Q28. On pose $z = y'$. Montrer que (E_0) est équivalente à :

$$z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x - 1}\right) z = 0. \qquad (E^\star)$$

Q29. Résoudre $(E^\star)$ sur $]0, 1[$.

Q30. En déduire les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$.

Partie II - Recherche d'une solution particulière dans le cas où $\mu \neq 0$

On se place dans le cas où $\mu \neq 0$.
Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif :

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q31. Justifier que y est de classe C^∞ sur un ensemble que vous préciserez.

Q32. Montrer que y vérifie (E_μ) si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(16n^2 - \mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right] x^n = 0.$

On supposera dorénavant que y est solution de (E_μ).

Q33. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad a_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2 - \mu)}{4^n (2n)!} a_0.$

Q34. Si $a_0 = 0$, donner une expression simple de y et préciser son rayon de convergence.

Q35. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ avec p un entier, montrer que y est polynomiale et préciser son degré.

Q36. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu \neq 16p^2$ pour tout entier p, préciser le rayon de convergence de y.

Partie III - Étude d'une solution particulière

On se place dans le cas où $a_0 = 1$ et $\mu = 1$.
Soit ϕ la fonction définie sur l'intervalle $]-R, R[$ par la relation :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie à la question **Q33** et R est le rayon de convergence obtenu à la question **Q36**.

Q37. À partir de la relation obtenue à la question **Q33**, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ a_n = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)}{4^n(2n)!}.$$

Q38. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $(4n)! = -2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)$.

Q39. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \dfrac{-(4n)!}{4^{2n} \times ((2n)!)^2 \times (4n-1)}$.

Q40. En admettant la formule de Stirling : $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$, montrer que $a_n \sim \dfrac{-1}{4\sqrt{2\pi} n^{3/2}}$.

Q41. Rappeler le rayon de convergence de ϕ et préciser la convergence de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Q42. En déduire que l'équation (E_1) admet une solution non-nulle f sur l'intervalle $]0, 1[$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1067 – D'après documents fournis