CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TPC

MATHEMATIQUES

Mardi 3 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

* * * * *

Exercice 1

Dans l'ensemble de l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

1) Soit α un réel, on considère la matrice A à coefficients réels, définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2+\alpha & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4+\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Montrer qu'il existe une unique valeur de α telle que 5 soit une valeur propre de A.

On suppose que α prend désormais la valeur déterminée à la question précédente.

b) Déterminer le spectre de A.

c) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

2) Soit $(a, c) \in \mathbb{R}^2$, on considère la matrice B à coefficients réels, définie par :

$$B = \begin{pmatrix} a+c & 0 & c \\ 0 & a+2c & 0 \\ c & 0 & a+c \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer le spectre de B.

b) Montrer que B est diagonalisable.

c) Déterminer une matrice D diagonale, de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telles que :

$$P^{-1}BP = D.$$

d) Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On veut résoudre l'équation matricielle :

$$B \times N = N \times B \qquad (E1)$$

d'inconnue N.
Montrer que N est solution de $(E1)$, si et seulement si, la matrice N', définie par $N' = P^{-1}NP$, est solution de l'équation $(E2)$:

$$DN' = N'D. \qquad (E2)$$

e) On suppose dans cette question et dans la suivante que $c \neq 0$.
Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de $(E2)$.

f) Exprimer les solutions de $(E1)$ à l'aide des matrices P et P^{-1}. On ne demande pas le détail des coefficients des matrices N solutions de (E_1).

3) Soit l'ensemble $F = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & 0 \\ c & 0 & a+b+c \end{pmatrix} \; ; \; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Déterminer une base de F et la dimension de F.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on va désormais étudier certaines propriétés de $M(a,b,c)$, élément quelconque de F.

c) Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a,b,c)$, associé à une valeur propre que l'on déterminera. On note λ_1 cette valeur propre.

d) Calculer le polynôme caractéristique de $M(a,b,c)$ sous forme factorisée.
Indication : faire apparaître le coefficient $X - \lambda_1$ dans le polynôme caractéristique $P(X)$, à l'aide d'une opération élémentaire très simple sur les lignes ou les colonnes.
On pourra utiliser la relation : $b^2 - bc + c^2 = (b - \frac{1}{2}c)^2 + \frac{3}{4}c^2$.

e) À quelles conditions portant sur le triplet (a,b,c), la matrice $M(a,b,c)$ admet-elle une valeur propre triple ?
Dans ce cas, la matrice $M(a,b,c)$ est-elle diagonalisable ?

f) À quelles conditions portant sur le triplet (a,b,c) la matrice $M(a,b,c)$ admet-elle une valeur propre double non triple ?

Exercice 2

I. Dans cette partie, sont établis des résultats préliminaires qui serviront dans la suite de l'exercice.

q désigne un réel quelconque de l'intervalle $]-1,1[$.

1) Rappeler, sans démonstration, la valeur de la somme infinie convergente $S(q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.

2) Justifier la convergence et la valeur des sommes infinies suivantes :

$$S_1(q) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, q^{n-1}\,, \quad S_2(q) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, q^{n-2}.$$

3) En déduire la convergence et la valeur des sommes infinies suivantes :

$$T(q) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\, q^n\,, \quad U(q) = \sum_{n=2}^{+\infty} n^2\, q^n.$$

II. On désire mettre au point un jeu vidéo dont le principe est le suivant : un joueur traverse successivement plusieurs salles d'un château. Lorsqu'il entre dans une salle, celle-ci peut être vide, sinon le joueur y rencontre des monstres qu'il doit affronter et vaincre avant de passer à la salle suivante. La partie s'arrête lorsque le joueur traverse successivement deux salles vides.
On admet que le joueur réussit toujours à vaincre les monstres rencontrés dans une salle.
Le jeu prévoit un nombre éventuellement illimité de salles.

On note M_i l'évènement : "le joueur rencontre des monstres dans la salle numéro i".
Les différents évènements M_i sont mutuellement indépendants et suivent tous une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $P(M_i) = p$.
Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de salles à traverser pour finir la partie.

1) Quelles valeurs la variable aléatoire X peut-elle prendre ?

2) Décrire les évènements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$ et $(X = 5)$.

3) Déterminer en fonction de p, les probabilités $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X = 4)$ et $P(X = 5)$.

4) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on note q_n la probabilité de l'évènement $(X = n)$.
En distinguant les cas M_1 et $\overline{M_1}$, montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que l'on a :

$$\forall n \geq 4,\ q_n = a \times q_{n-1} + b \times q_{n-2},$$

où a et b sont deux constantes à exprimer en fonction de p.

5) On suppose désormais que $p = \dfrac{1}{3}$.

- **a)** Vérifier que : $\forall n \geq 4,\ q_n = \dfrac{1}{3}q_{n-1} + \dfrac{2}{9}q_{n-2}$.
- **b)** En déduire que : $\forall n \geq 2,\ q_n = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.

6) Déterminer l'espérance $E(X)$. On pourra exprimer $E(X)$ à l'aide de la fonction T définie en **I.3**.
Combien de salles faudra-t-il traverser en moyenne pour terminer une partie ?

7) Déterminer la variance $V(X)$. On pourra exprimer $V(X)$ à l'aide de la fonction U définie en **I.3**.

Problème

La partie **I** établit des résultats qui seront réutilisés dans les parties **II**, **III** et **IV**. La partie **II** est indépendante des parties **III** et **IV**. La partie **IV** utilise certains résultats établis dans la partie **III**.

I. Etude des fonctions ch et sh

On considère deux fonctions, notées ch et sh, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2},$$

où exp désigne de façon usuelle la fonction exponentielle.

1) Étudier le caractère "pair" ou "impair" des fonctions ch et sh.

2) On note ch^2 le produit $\mathrm{ch}\times\mathrm{ch}$ et sh^2 le produit $\mathrm{sh}\times\mathrm{sh}$. Montrer la propriété calculatoire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

3) Étudier la dérivabilité des fonctions ch et sh et montrer que leurs dérivées respectives s'expriment facilement en fonction de ch et de sh.

4) Étudier les variations de la fonction sh sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

5) Étudier les variations de la fonction ch sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

II. Etude d'une courbe paramétrée

On se place dans $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit deux réels strictement positifs a et b, on note Γ la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}(t) \\ y = b\,\mathrm{sh}(t) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer qu'il est possible de réduire l'étude de Γ à un paramétrage $t \in I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ à déterminer. Quelles sont alors les symétries vérifiées par Γ ?

2) La courbe Γ admet-elle des points stationnaires ?

3) Étudier les variations de x et y pour $t \in I$, où I est l'intervalle déterminé à la question **II.1**. À défaut, on pourra étudier les variations pour $t \in \mathbb{R}$.
Donner le tableau de variations associé aux variations simultanées de x et de y.

4) On donne le point $F(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ et la droite Δ d'équation $x = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

On pose $c = \sqrt{a^2+b^2}$ et $e = \dfrac{c}{a}$.

a) Montrer que tout point M de Γ vérifie :

$$MF = eMH,$$

où H désigne le projeté orthogonal de M sur Δ.

De façon usuelle, $MF = \|\overrightarrow{MF}\|$ et la distance de M à Δ vérifie $d(M, \Delta) = MH$.

b) Réciproquement, soit $M(x, y)$ un point du plan vérifiant :

$$\begin{cases} x \geq a \\ MF = eMH \\ H \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur } \mathcal{D} \end{cases}.$$

Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}^+$, tel que $x = a\operatorname{ch}(t)$.
En déduire que M appartient à la courbe Γ.

c) On suppose, pour cette question uniquement, que $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$.
Déduire des questions précédentes une méthode de construction point par point de la courbe Γ, sans calculs des coordonnées $(\operatorname{ch}(t), \sqrt{3}\operatorname{sh}(t))$.

III. Etude de la fonction th

On considère la fonction notée th, définie par $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

1) Montrer que th est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier les variations de la fonction th sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) **a)** Montrer que la fonction dérivée th' vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x).$$

b) On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'écriture $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième d'une fonction f, avec la convention : pour $n = 0$, $f^{(0)} = f$.
On peut alors écrire : $\operatorname{th}^{(n+1)} = (\operatorname{th}')^{(n)}$.
En utilisant la formule de Leibniz et la relation de la question **III.3.a**, exprimer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}^{(n+1)}(x)$ en fonction des valeurs $\operatorname{th}^{(k)}(x)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $a_k = \dfrac{\operatorname{th}^{(k)}(0)}{k!}$. Déduire de la question **III.3.b** le résultat :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}.$$

5) On rappelle que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{th}^{(2n)}(0)$. Que vaut alors a_{2n} ?

6) On admet que la fonction th est développable en série entière sur $]R, R[$, où $R > 0$. Il n'est pas nécessaire de connaître la valeur exacte de R.

a) Donner l'expression du développement en série entière de th à l'aide des a_n.

b) En utilisant les questions **III.4** et **III.5**, donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de th. On donnera les valeurs exactes des coefficients b_k du développement limité : $\mathrm{th}(x) = \sum_{k=0}^{5} b_k \, x^k + o(x^5)$.

IV. Etude d'une fonction définie par morceaux

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

1) Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4) **a)** La fonction $\ln \circ \mathrm{ch}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de sa dérivée en tout point de $\mathbb{R}$.

b) En déduire que, sur un intervalle J, non réduit à un point, que l'on précisera, la fonction f est égale à la somme d'une série entière convergente.

c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5) On rappelle que pour $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, l'écriture $o(u(x))$ désigne une quantité $o(u(x)) = u(x) \times \varepsilon(x)$ où ε est une fonction de x vérifiant $\lim_{x \to \ell} \varepsilon(x) = 0$.

a) En factorisant par $\exp(x)$ dans l'expression de $\mathrm{ch}(x)$, montrer que f admet un développement asypmptotique pour x tendant vers $+\infty$ de la forme :

$$f(x) = c_1 + \frac{c_2}{x} + c_3 \frac{\exp(-\alpha x)}{x} + o\Big(\frac{\exp(-\alpha x)}{x}\Big),$$

où c_1, c_2, c_3 et α sont quatre constantes réelles que l'on déterminera.

b) En déduire la valeur de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

6) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} (1 - f(x)) \, \mathrm{d}x$?

Fin

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1233 – D'après documents fournis