CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème totalement indépendants entre eux et qui peuvent être abordés dans un ordre quelconque.

Exercice

On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1.
Autrement dit, $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}] = \left\{ a\,\mathrm{X} + b\,,\ \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On désigne par φ l'application de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}] \times \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}] \times \mathbb{R}_1[\mathrm{X}],\quad \varphi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{Q}(t)\,dt$.

Par exemple, si $\mathrm{P} = \mathrm{X} + 1$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}$, alors $\varphi(\mathrm{X}+1, \mathrm{X}) = \int_0^1 (t+1)\,t\,dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

I. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

Pour alléger les notations, on notera désormais $(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q})$ le produit scalaire des polynômes P et Q à la place de $\varphi(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$.

La norme associée à ce produit scalaire sera notée $\|\,.\,\|$.

Ainsi, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$, $\|\mathrm{P}\| = \sqrt{(\mathrm{P} \mid \mathrm{P})}$.

II. Dans cette question, on se propose de montrer qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ possédant la propriété suivante : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}],\ \ (\mathrm{P} \mid \mathrm{P}_0) = \mathrm{P}(0)$.

On distinguera bien P_0 qui désigne un polynôme de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{P}(0)$ qui représente la valeur du polynôme P en 0.

II.A. Soit P_0 un polynôme fixé de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

Montrer que l'égalité $(\mathrm{P} \mid \mathrm{P}_0) = \mathrm{P}(0)$ est vérifiée pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$, si et seulement si, elle est vérifiée pour les deux polynômes $\mathrm{P} = 1$ et $\mathrm{P} = \mathrm{X}$.

II.B. On pose : $\mathrm{P}_0(\mathrm{X}) = a_0\,\mathrm{X} + b_0$ où a_0 et b_0 désignent deux réels.

II.B.1. Calculer $(1 \mid \mathrm{P}_0)$ et $(\mathrm{X} \mid \mathrm{P}_0)$ à l'aide de a_0 et b_0.

En déduire que $(\mathrm{P} \mid \mathrm{P}_0) = \mathrm{P}(0)$ pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$,

si et seulement si : $\begin{cases} \frac{1}{2} a_0 + b_0 = 1 \\ \frac{1}{3} a_0 + \frac{1}{2} b_0 = 0 \end{cases}$

II.B.2. Conclure qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_1[X]$ que l'on explicitera tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad (P \mid P_0) = P(0)$.

III. On désigne par S l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_1[X]$ tels que $\| P \| = 1$ et on se propose de déterminer la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S en utilisant successivement deux méthodes différentes.

III.A. Première méthode.

On pose $P_1 = 1$.

III.A.1. Vérifier que $\| P_1 \| = 1$.

III.A.2. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, déterminer un polynôme P_2 de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que (P_1, P_2) soit une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

III.A.3. Montrer que les éléments de S sont exactement les polynômes de la forme $\cos(\theta)\, P_1 + \sin(\theta)\, P_2$, où θ décrit $\mathbb{R}$.

III.A.4. Si $P = \cos(\theta)\, P_1 + \sin(\theta)\, P_2$, déterminer deux réels λ et θ_0 indépendants de θ et tels que $P(0) = \lambda \cos(\theta - \theta_0)$ pour tout réel θ.

III.A.5. En déduire la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S.

III.B. Deuxième méthode.

III.B.1. Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et préciser les cas où cette inégalité est une égalité.

III.B.2. En utilisant le résultat obtenu dans la partie **II.**, montrer que : $\forall P \in S, \quad P(0) \leq \| P_0 \|$.

III.B.3. Déterminer un polynôme P de S tel que $P(0) = \| P_0 \|$.

III.B.4. Retrouver ainsi d'une seconde manière la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S.

Problème

Définitions et notations utilisées :

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.

- On note Id l'application identique de E.
  Soient f et g deux endomorphismes de E ; on note $f \circ g$ la composée de f et de g.

On convient que $f^0 = \mathrm{Id}$, $f^1 = f$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on pose $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots\dots \circ f}_{k\ fois}$.

- Soit f un endomorphisme de E.
  On dit que f est cyclique, si et seulement si, il existe un vecteur a de E tel que $\left(a, f(a), f^2(a), \dots\dots, f^{n-1}(a) \right)$ soit une base de E.
  Par exemple, si $n = 2$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur a de E tel que $\left(a, f(a) \right)$ soit une base de E.
  De même, si $n = 3$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur a de E tel que $\left(a, f(a), f^2(a) \right)$ soit une base de E.

- Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on note $\deg(\mathrm{P})$ le degré de P.

La première partie du problème est consacrée à l'étude d'exemples.

La seconde partie propose l'étude d'un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.
Elle est totalement indépendante de la première partie.

I. Etude d'exemples.

I.A. On considère dans cette section **I.A.** que $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$.
Soit α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est la matrice $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

I.A.1. On choisit $a = (2, 3)$.
Déterminer le vecteur $\alpha(a)$ et montrer que α est cyclique.

I.A.2. Déterminer le vecteur $\alpha^2(a)$ puis déterminer deux réels x et y tels que : $\alpha^2(a) = x\,a + y\,\alpha(a)$.

I.A.3. Déterminer la matrice A' de α dans la base $(a, \alpha(a))$.

I.A.4. Montrer que le réel 2 est une valeur propre de α.

I.A.5. Déterminer un vecteur b non nul de $\mathbb{R}^2$, tel que $(b, \alpha(b))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$.
On donnera les coordonnées du vecteur b que l'on aura choisi dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

I.B. On considère dans cette section **I.B.** que $E = \mathbb{R}^3$.

Soit β l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

I.B.1. Déterminer le polynôme caractéristique de β.

I.B.2. Montrer que β est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

I.B.3. Déterminer une base de chacun des sous espaces propres de β.

En déduire que β est diagonalisable, puis donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de β soit la matrice $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

I.B.4. Montrer que $\beta^2 - 3\beta + 2\,\mathrm{Id} = 0$ où 0 désigne ici l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

I.B.5. En déduire que β n'est pas cyclique.

I.C. On considère dans cette section **I.C.** que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit γ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le polynôme P'.

On admettra que γ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on ne demande pas de le vérifier.

On a donc par exemple : $\gamma\left(X^2 - 3X + 1\right) = 2X - 3$.

I.C.1. Déterminer $\gamma\left(X^{n-1}\right)$ et plus généralement $\gamma^k\left(X^{n-1}\right)$ pour tout entier k compris au sens large entre 1 et $n-1$.

On effectuera un raisonnement par récurrence sur *k*.

I.C.2. En déduire que γ est cyclique.

II. Dans cette partie, on se donne un entier *n* supérieur ou égal à 2.

On considère l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe le polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

On admettra que δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on ne demande pas de le vérifier.

On a donc par exemple : $\delta\left(X^2 - 3X + 1\right) = \left((X+1)^2 - 3(X+1) + 1\right) - \left(X^2 - 3X + 1\right)$.

On rappelle également le résultat suivant que l'on pourra utiliser sans avoir à le démontrer :

soit $\left(Q_0, Q_1 ...., Q_{n-1} \right)$ une famille de polynômes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ telle que pour tout entier i compris au sens large entre 0 et $n-1$, $\deg(Q_i) = i$.

Alors, la famille $\left(Q_0, Q_1 ...., Q_{n-1} \right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

II.A. Dans cette question, on montre que δ est cyclique.

II.A.1. Soit k un entier naturel compris au sens large entre 1 et $n-1$.

En utilisant la formule du binôme, montrer que le polynôme $\delta\left(X^k\right)$ est exactement de degré $k-1$.

II.A.2. Soit maintenant P un élément quelconque de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, le polynôme P étant supposé de degré supérieur ou égal à 1.

En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$.

II.A.3. Montrer enfin que δ est cyclique en considérant la famille $\left(X^{n-1}, \delta\left(X^{n-1}\right), \delta^2\left(X^{n-1}\right)........, \delta^{n-1}\left(X^{n-1}\right) \right)$.

II.B. Dans cette question, on détermine le noyau et l'image de l'endomorphisme δ.

II.B.1. En utilisant le résultat de la question **II.A.2.**, montrer que le noyau de l'endomorphisme δ est constitué de l'ensemble des polynômes constants.

II.B.2. Montrer que l'image de l'endomorphisme δ est contenue dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

II.B.3. En utilisant le théorème du rang, montrer finalement que l'image de l'endomorphisme δ coïncide avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

II.C. Dans cette question, on introduit une famille de polynômes $P_0, P_1, P_2 ...., P_{n-1}$, qui va permettre de démontrer d'une autre manière que δ est cyclique.

On définit les polynômes $P_0, P_1, P_2 ...., P_{n-1}$, de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ en posant :

$$P_0(X) = 1 \quad , \quad P_1(X) = \frac{1}{1!} X \quad , \quad P_2(X) = \frac{1}{2!} X(X-1) \quad , \quad ....$$

$$P_{n-1}(X) = \frac{1}{(n-1)!} X(X-1)(X-2)..........(X-n+2).$$

On a donc, pour tout entier j compris au sens large entre 1 et $n-1$,

$$P_j(X) = \frac{1}{j!} X(X-1)(X-2)..........(X-j+1) = \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (X-k).$$

II.C.1. Montrer que $\left(P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1} \right)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

II.C.2. Dans cette question et dans cette question seulement, on suppose que $n = 4$.

Déterminer les coordonnées du polynôme $X^3 - 5X^2 + X - 3$ dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.

Indication : on pourra remarquer que 0 est racine de P_1, P_2 et P_3, puis que 1 est racine de P_2 et P_3...

II.C.3. Soient i et j deux entiers naturels, tels que : $i \neq 0$ *et* $1 \leq j \leq n-1$.

Montrer que $\delta(P_j) = P_{j-1}$ puis déterminer $\delta^i(P_j)$ en distinguant les cas $i \leq j$ et $i > j$.

On donnera le résultat sans avoir besoin de le justifier.

II.C.4. En déduire une autre démonstration du fait que δ est cyclique.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1323 – D'après documents fournis