CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI**

# MATHEMATIQUES 2

**Durée : 3 heures**

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Calculatrices autorisées**

## Objectif et convention

On étudie dans ce sujet certains endomorphismes de l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbf{R}^3$ usuel. On se propose, entre autres, de reconnaître parmi ceux-ci les endomorphismes de référence : projections orthogonales, réflexions, rotations etc.

On notera $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Conformément à l'usage, les candidats pourront identifier les vecteurs $(x, y, z)$ de $\mathbf{R}^3$ et les matrices colonnes à trois coefficients réels $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On pourra ainsi considérer que $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour tous nombres réels $a$, $b$ et $c$, on considère la matrice $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$,

$f_{a,b,c}$ désignera l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbf{R}^3$ usuel ayant pour matrice $M(a,b,c)$ dans la base canonique $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

On notera :
$I_3$ la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^3$ ;
$\mathcal{P}$ le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation, dans la base canonique, $x+y+z=0$ ;
et $\Delta$ la droite vectorielle orthogonale à $\mathcal{P}$.

**Les parties ne sont pas indépendantes. En particulier, l'étude des valeurs propres, faite dans la partie III, intervient dans la partie IV.**

## I Préliminaire important

On pose $\boldsymbol{e}'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{e}'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**1°)** Construction d'une base orthonormale directe

**1.a)** Montrer que $\boldsymbol{e}'_1$ est un vecteur unitaire (c'est-à-dire de norme 1) dirigeant la droite $\Delta$.

**1.b)** Montrer que $\boldsymbol{e}'_2$ est un vecteur unitaire appartenant au plan $\mathcal{P}$.

**1.c)** Déterminer un vecteur $\boldsymbol{e}'_3$ de sorte que $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ soit une base orthonormale directe de $\mathbf{R}^3$.

**2°)** Soient $a, b$ et $c$ des réels.

**2.a)** Préciser $f_{a,b,c}(\boldsymbol{e}'_1)$ et en déduire que le réel $a+b+c$ est une valeur propre de $f_{a,b,c}$.

**2.b)** Justifier que la famille $(\boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ est une base orthonormale de $\mathcal{P}$.

**2.c)** Vérifier que les vecteurs $f_{a,b,c}(\boldsymbol{e}'_2)$ et $f_{a,b,c}(\boldsymbol{e}'_3)$ appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

**2.d)** Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par $f_{a,b,c}$.

*On rappelle qu'un sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbf{R}^3$ est stable par un endomorphisme $f$ quand pour tout $\boldsymbol{u}$ de $F$, son image par $f$, c'est-à-dire le vecteur $f(\boldsymbol{u})$, appartient également à $F$.*

**Les résultats de ce préliminaire peuvent être utilisés à de nombreuses reprises dans la suite du sujet.**

## II Quelques exemples

**3°)** On note $\psi$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $J = M(0,1,0)$.

**3.a)** Déterminer le rang de la matrice $J$. $J$ est-elle inversible ?

**3.b)** Calculer le polynôme caractéristique de $J$ et montrer que $J$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

**3.c)** Donner la matrice de $\psi$ dans la base $\mathcal{B}'$ choisie au préliminaire I.1°) (*on pourra utiliser les calculs faits au préliminaire ou utiliser la formule de changement de bases et la calculatrice*).

**3.d)** En déduire que l'endomorphisme $\psi$ est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques (axe orienté, angle).

**4°)** Dans cette question, on considère la matrice $M_2 = M(1/3, -2/3, -2/3)$.

**4.a)** Préciser la matrice $M_2 \times M_2$. Que dire du rang de $M_2$ ?

**4.b)** Justifier que l'endomorphisme $s$ de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $M_2$ est une symétrie.
Préciser les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id})$ (associés respectivement aux valeurs propres 1 et $-1$).

**4.c)** En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de $M_2$.

**5°)** Dans cette question, on considère la matrice $M_1 = M(1/3, 1/3, 1/3)$.

**5.a)** Déterminer le rang de la matrice $M_1$. $M_1$ est-elle inversible ?

**5.b)** Calculer, en faisant apparaître le détail des calculs, le polynôme caractéristique de $M_1$ (*on pourra commencer par l'opération élémentaire* $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$).

**5.c)** Préciser chaque sous-espace propre de $M_1$.

**5.d)** Justifier que $M_1$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et reconnaître géométriquement l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $M_1$.

## III Étude des matrices $M(a,b,c)$

Dans cette partie, $a, b$ et $c$ désignent des nombres réels. On rappelle que $J = M(0,1,0)$.

On désignera par j le complexe $\exp\left(\mathrm{i}\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ où $\mathrm{i}^2 = -1$.

**6°)** Sans calculatrice, justifier : $\mathrm{j}^3 = 1$ et $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

**7°)** Préciser la matrice $J^2$ et exprimer la matrice $M(a,b,c)$ à l'aide des matrices $I_3$, $J$ et $J^2$ et des réels $a$, $b$ et $c$.

**8°)** Étude de $J$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$

**8.a)** Déterminer les valeurs propres **complexes** de $J$ et montrer que $J$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.
*On rappelle que le polynôme caractéristique de $J$ a déjà été obtenu à la question 3.b).*

**8.b)** Expliciter une matrice $P$ à coefficients **complexes** telle que $D = P^{-1}JP$ soit une matrice diagonale à coefficients **complexes** que l'on précisera.

**8.c)** Montrer que $P^{-1}J^2P = D^2$.
Que vaut la matrice $P^{-1}I_3P$ ?

**9°)** Soient $a, b$ et $c$ réels.

**9.a)** Déduire des questions 7°) et 8°) que $M(a,b,c)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ et que les valeurs propres complexes (éventuellement confondues) de $M(a,b,c)$ sont :

$$a+b+c, \quad a+\mathrm{j}\,b+\mathrm{j}^2\,c \quad \text{et} \quad a+\mathrm{j}^2\,b+\mathrm{j}\,c.$$

**9.b)** Préciser les parties réelles et imaginaires de chacune des valeurs propres de $M(a,b,c)$ en fonction de $a, b$ et $c$.

**9.c)** Montrer que les valeurs propres de $M(a,b,c)$ sont toutes réelles si, et seulement si, les réels $b$ et $c$ sont égaux.

**10°)** Dans cette question, on suppose que les réels $b$ et $c$ sont différents : $b \neq c$.
Montrer que la matrice $M(a,b,c)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

**11°)** Dans cette question, on suppose que les réels $b$ et $c$ sont égaux : $b = c$.
On rappelle que $f_{a,b,b}$ est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M(a,b,b)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

**11.a)** Déterminer les valeurs propres de $f_{a,b,b}$, ainsi que les sous-espaces propres associés *(on envisagera les deux cas : $b = 0$ et $b \neq 0$).*

**11.b)** Montrer que $f_{a,b,b}$ est diagonalisable et plus précisément qu'il existe une matrice à coefficients réels $Q$ **orthogonale** telle que pour tous réels $a$ et $b$, la matrice $D(a,b) = {}^{\mathbf{t}}QM(a,b,b)Q$ soit diagonale.
Expliciter une telle matrice $Q$ (*on pourra utiliser 1.c)*), ainsi que la matrice $D(a,b)$ obtenue.

## IV Application : Étude des projecteurs

**12°)** Soient $a, b$ et $c$ des nombres réels.

**12.a)** À l'aide de la partie précédente, montrer que :
$f_{a,b,c}$ admet deux valeurs propres réelles distinctes si, et seulement si, ($b = c$ et $b \neq 0$).

**12.b)** Déterminer les valeurs des réels $a$, $b$ et $c$ pour lesquelles l'ensemble des valeurs propres de $M_{a,b,c}$ est exactement $\{0, 1\}$.

**12.c)** En déduire l'équivalence des deux assertions (i) et (ii) ci-dessous :

(i) $f_{a,b,c}$ est un projecteur de $\mathbf{R}^3$ autre que l'identité et l'application nulle

(ii) $(a,b,c) = (1/3, 1/3, 1/3)$ ou $(a,b,c) = (2/3, -1/3, -1/3)$

Préciser les éléments caractéristiques des deux projecteurs obtenus.

*Fin de l'énoncé*