CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Les parties II et III sont indépendantes

PARTIE I

Soit $\sum u_n$ la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$.

I.1.

I.1.1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On note $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

I.1.2. Montrer que, pour tout $a > 0$, $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

La série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

I.1.3. Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

I.2.

I.2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n.

I.2.2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},\ v_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Montrer que $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

I.2.3. On note $V = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ la somme de la série de fonctions $\sum v_n$.

Montrer que V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U.

I.3. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \ p_0(x) = x\,;$$

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R},\ \ p_n(x) = x\prod_{k=1}^{k=n}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une fonction p que l'on exprimera à l'aide de V puis de U.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite donnant $p(x)$ sera alors notée : $p(x) = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

PARTIE II

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note g_x la fonction d'une variable réelle, périodique de période 2π, telle que, pour tout $t \in]-\pi, \pi]$, on ait : $g_x(t) = \operatorname{ch}\left(\frac{xt}{\pi}\right)$.

II.1.

II.1.1. Préciser pourquoi g_x est égale en tout point $t \in \mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier :

$$\frac{1}{2}a_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(x)\cos(nt) + b_n(x)\sin(nt)).$$

II.1.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $b_n(x)$.

II.1.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $a_n(x)$. On distinguera les cas $x = 0$ et $x \neq 0$.

II.2.

II.2.1. En donnant à t une valeur particulière dans la série de Fourier de g_x, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $U(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} - \dfrac{1}{x}$.

II.2.2. A partir de $V(x) = \int_0^x U(t)dt$ et du résultat de **II.2.1**, donner à l'aide des fonctions usuelles une expression de la fonction V définie à la question **I.2.3**.

II.2.3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{sh}(x) = p(x) = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

PARTIE III

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$ par :

$$\text{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[, \quad h(x,t) = \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1}.$$

III.1.

III.1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto h(x,t)$ admet, quand t tend vers 0 par valeurs positives, une limite finie que l'on déterminera.

III.1.2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

III.2.

III.2.1. Montrer que h possède des dérivées partielles par rapport à x en tout point de $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$ et à tout ordre. Calculer, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$. On distinguera les cas n pair et n impair.

III.2.2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

III.3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $f^{(2m)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m} \sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1} dt$ et $f^{(2m+1)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1} \cos(tx)}{\exp(\pi t) - 1} dt$.

III.4.

III.4.1. Montrer que, pour tout $t > 0$, on a : $\dfrac{1}{\exp(\pi t) - 1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n\pi t)$.

III.4.2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t)\sin(tx)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t)\sin(tx) dt$ à l'aide de $u_n(x)$.

III.4.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [0,+\infty[$, on pose : $h_n(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \exp(-k\pi t)\sin(tx)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0,+\infty[$,

$$h_n(x,t) = (1 - \exp(-n\pi t)) \frac{\sin(tx)}{e^{\pi t} - 1}.$$

Puis, montrer que : $f(x) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x,t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En déduire une expression simple de la fonction f à l'aide de la fonction U.

Fin de l'énoncé