CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont autorisées

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PARTIE I

Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 – Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Donner pour $x \neq 0$ la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f en x.

2 – Montrer que f est continue à gauche en 0.

3 – f est-elle dérivable à gauche en 0 ? Dans l'affirmative, donner la valeur de la dérivée à gauche de f en 0, notée $f_g'(0)$. f est-elle dérivable à droite en 0 ?

4 – Donner le tableau de variations de f. On fera figurer les limites en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0 (par valeurs supérieures et inférieures).

5 – Tracer la courbe représentative de f. On précisera les asymptotes éventuelles.

PARTIE II

Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle ($\mathcal{E}$) : $x^2 y' + y = 0$.

1 – Résoudre ($\mathcal{E}$) sur $]0,+\infty[$.

2 – Montrer que pour tout réel $x > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$ converge.

On peut donc définir une fonction φ sur $]0,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt.$$

3 – Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. Montrer que φ est de classe C^1 sur $[a,b]$ et donner, pour $x \in [a,b]$, l'expression de la dérivée $\varphi'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

On vérifiera avec soin toutes les hypothèses du théorème utilisé.

4 – En déduire que φ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, puis montrer que φ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle ($\mathcal{E}_1$) : $x^2 y' + y = x$.

5 – En déduire à l'aide de φ l'ensemble des solutions de ($\mathcal{E}_1$) sur $]0,+\infty[$.

PARTIE III

Détermination d'une valeur approchée de $\varphi(x)$

On se donne dans cette partie un réel $x > 0$.

1 – Justifier que pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$ on a :

$$\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}}.$$

2 – Justifier pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ l'existence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$.

En déduire :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt.$$

3 – On pose pour $k \in \mathbb{N}$: $I_k(x) = \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-\frac{t}{x}} \mathrm{d}t$.

3.1 – Calculer $I_0(x)$.

3.2 – Donner pour $k \in \mathbb{N}$ une relation entre $I_{k+1}(x)$ et $I_k(x)$.

3.3 – En déduire que : $I_k(x) = k!x^{k+1}$.

4 – On pose désormais, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!x^{k+1}.$$

4.1 – Prouver que : $|R_n(x)| \le (n+1)!x^{n+2}$.

On suppose désormais que $x = \frac{1}{10}$.

4.2 – On pose $u_n = (n+1)!x^{n+2} = \frac{(n+1)!}{10^{n+2}}$. En étudiant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minimale pour $n = 8$. Donner à l'aide de votre calculatrice une évaluation numérique de u_8.

4.3 – En déduire une valeur approchée de $\varphi\left(\frac{1}{10}\right)$ à 10^{-4} près.

5 – Quel est le rayon de convergence de la série entière de la variable complexe t :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k k!t^{k+1} \ ?$$

Est-elle convergente pour $t = \frac{1}{10}$?

6 – Expliquer en quoi la partie III est une illustration de la citation suivante de Henri Poincaré (1854 – 1912) :

'Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment.'*

* L'analyse est à cette époque considérée comme une partie de la géométrie.

PARTIE IV

Un peu d'algorithmique

On considère l'algorithme suivant rédigé en français :

> On affecte 0,1 à la variable u.
>
> Pour k allant de 1 à 8, calculer $-\dfrac{k\,u}{10}$, puis affecter le résultat à u.
>
> Afficher u.

1 – Quelle sera la valeur affichée pour u à la dernière ligne ?
2 – Écrire le programme correspondant en utilisant la syntaxe de l'un des logiciels de calcul formel du programme (MAPLE ou MATHEMATICA par exemple). On précisera le logiciel utilisé.
3 – Adapter le programme précédant en introduisant une variable S, de sorte qu'en sortie de boucle S contienne $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \frac{(-1)^k\, k!}{10^{k+1}}$.
On s'interdira dans cette question d'utiliser une commande de sommation (telle add *ou* sum*) prédéfinie par le logiciel.*

Fin de l'énoncé