CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées

***

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

***

EXERCICE

On munit un plan euclidien orienté d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $\mathcal{H}$ la courbe d'équation $3x^2 + 13y^2 - 10\sqrt{3}\,xy = 2$ et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

1. Montrer qu'il existe un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{I}, \vec{J}\right)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer, dans lequel la courbe $\mathcal{H}$ a pour équation $18X^2 - 2Y^2 = 2$.
   On pourra utiliser la calculatrice.
2. Justifier que $\mathcal{H}$ est une hyperbole et préciser son excentricité.
3. Reconnaître la courbe $\mathcal{C}$. En déduire une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O; \vec{I}, \vec{J}\right)$.
4. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ se coupent en quatre points A, B, C et D dont on donnera les coordonnées dans le repère $\left(O; \vec{I}, \vec{J}\right)$.
5. Prouver que les quatre points A, B, C et D forment un rectangle et donner son aire.
6. Donner les coordonnées des sommets, des équations des asymptotes et des équations des tangentes aux sommets de l'hyperbole dans le repère $\left(O; \vec{I}, \vec{J}\right)$.
7. Représenter graphiquement dans le repère $\left(O; \vec{I}, \vec{J}\right)$, la courbe $\mathcal{C}$ et l'hyperbole $\mathcal{H}$ avec ses asymptotes, ses sommets et ses tangentes en ses sommets.
   N.B. : On ne demande pas de faire apparaître le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

PROBLÈME

Ce problème comporte trois parties. Les parties A et B peuvent se traiter de façon indépendante. On peut utiliser certains résultats de la partie B pour traiter la partie C.

Notations

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à n colonnes à coefficients réels. On note ${}^tM$ la transposée de la matrice M.
On appelle vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ toute matrice à n lignes et 1 colonne à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Définitions

On dit qu'un vecteur colonne est **stochastique** lorsque ses coefficients sont tous positifs et que la somme de ces coefficients vaut 1. Par exemple le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}6 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$ est stochastique car $0{,}3 \geqslant 0$ et $0{,}6 \geqslant 0$ et $0{,}1 \geqslant 0$ et $0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}1 = 1$.
On dit qu'une matrice carrée est **stochastique** lorsque chacune de ses colonnes l'est.

Partie A

Un exemple en dimension 3

Dans cette partie, on étudie les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2};\ z_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}\ :$$

$$(R)\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \frac{7}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n + \frac{1}{2}z_n \\[2mm] y_{n+1} & = & \frac{3}{10}x_n + \frac{1}{10}z_n \\[2mm] z_{n+1} & = & \frac{3}{5}y_n + \frac{2}{5}z_n \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système (R) s'écrit sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$ avec A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera.
2. Justifier que la matrice carrée A est stochastique.
3. Écrire un programme dans le langage de `Maple` ou `Mathematica` qui calcule le vecteur colonne X_{2010} .
4. Calculer la trace de A notée $\mathrm{Tr}(A)$ et le déterminant de A noté $\det(A)$. *On pourra utiliser la calculatrice.* La matrice A est-elle inversible ?

5. Prouver que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice ${}^tA$. Quelle est la valeur propre associée ?
6. *On pourra admettre les résultats demandés ici pour traiter la question suivante.*
   Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que les matrices M et ${}^tM$ ont le même polynôme caractéristique.
   (b) Établir que M admet trois valeurs propres complexes (éventuellement non distinctes) que l'on note λ_1, λ_2 et λ_3 et que : $\mathrm{Tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.
7. Déduire des questions précédentes que les valeurs propres de A sont 0, $\dfrac{1}{10}$ et 1.
8. Justifier qu'il existe une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec
   $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -2 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels que l'on déterminera.
9. Calculer P^{-1}. *On pourra utiliser la calculatrice.*
10. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Exprimer X_n en fonction de n.
    (b) Montrer que le vecteur colonne X_n est stochastique.
12. Prouver que la suite (x_n) (respectivement (y_n) et (z_n)) est convergente vers une limite, notée l_x (respectivement l_y et l_z).
13. Prouver que le vecteur colonne $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$ est stochastique et est vecteur propre de A.

Partie B

Cas de la dimension 2

Soit A une matrice carrée stochastique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère une suite (X_n) de vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^2$ telle que X_0 est stochastique et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

1. Montrer qu'il existe a et b deux réels de $[0, 1]$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$.

On définit deux suites réelles (x_n) et (y_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne X_n est stochastique. *Il s'agit d'établir que $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$ et $x_n + y_n = 1$.*
3. Montrer que $0 \leqslant \mathrm{Tr}(A) \leqslant 2$.
4. (a) On suppose que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
   Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut A^2 ? Que se passe t-il pour la suite (X_n) ?
   (b) On suppose que $\mathrm{Tr}(A) = 2$.
   Que vaut A ? Que se passe t-il pour la suite (X_n) ?

On suppose désormais que $0 < \mathrm{Tr}(A) < 2$.

5. Montrer que $-1 < a - b < 1$.

Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$.

6. (a) Montrer que V est un vecteur propre de A. Exprimer la valeur propre associée que l'on note q, en fonction de a et b.
   (b) Prouver que $|q| < 1$.
7. Établir que 1 est une valeur propre de A.
8. Prouver que la matrice A est diagonalisable.
9. *On pourra admettre le résultat demandé ici pour traiter la suite.*
   Établir qu'il existe un vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$, $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$ et un réel λ vérifiant :
   $$AL = L \text{ et } X_0 = L + \lambda V.$$
   On ne cherchera pas à calculer l_x, l_y et λ.
10. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = L + q^n \lambda V$.
11. Prouver que la suite (x_n) (respectivement (y_n)) est convergente vers l_x (respectivement l_y).
12. En déduire que le vecteur colonne L est stochastique. *On pourra utiliser* B.2.
13. Soit T un vecteur colonne stochastique de $\mathbb{R}^2$ tel que $AT = T$. Montrer que $T = L$.

Partie C

Un cas particulier

On reprend les notations de la partie B.
Dans cette partie, on suppose de plus que la matrice A n'est pas inversible.

1. Montrer que la matrice A est de rang 1.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$.
3. Établir alors que $A^2 = A$.
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = AX_0$.

Soit E un plan euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et f l'endomorphisme de E associé à la matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

5. Montrer que l'application linéaire f est un projecteur.
6. Donner dans la base $\mathcal{B}$, une équation de $\mathrm{Ker} f$ et une équation de $\mathrm{Im} f$.
7. En déduire que l'endomorphisme f est une projection orthogonale si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\overrightarrow{u}(\theta)$ le vecteur de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.
   Établir que $\|f(\overrightarrow{u}(\theta))\|^2 = \left((2\alpha-1)^2 + 1\right)\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$.
9. En déduire les valeurs de $\dfrac{\|f(\vec{\imath})\|}{\|\vec{\imath}\|}$ et $\dfrac{\|f(\vec{\imath}+\vec{\jmath})\|}{\|\vec{\imath}+\vec{\jmath}\|}$ en fonction de α.
10. Démontrer que f est une projection orthogonale si, et seulement si, pour tout $\vec{x} \in E$, on a : $\|f(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\|$.

Fin de l'énoncé