CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 3 heures

Remettre à chaque candidat une feuille de papier millimétré

Les calculatrices sont autorisées

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

On considère le plan vectoriel euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \vec{i},\vec{j}$.

<u>Pour les dessins</u>, on munira la feuille de papier millimétré d'une origine O placée au centre de la feuille et on représentera le vecteur $\vec{m}$ par le point M tel que $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$.

Soit $\mathcal{B} = \vec{I},\vec{J}$ une autre base de $\mathcal{P}$, **non nécessairement orthonormée**. Si $\vec{m}$ est un vecteur de $\mathcal{P}$, on notera x,y ses coordonnées dans $\mathcal{B}_0$ et u,v ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. On notera X et U les matrices colonnes :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

et on notera P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

On s'intéresse à la courbe γ d'équation $u^2 + v^2 = 1$ (on notera qu'il s'agit d'une équation donnée dans la base $\mathcal{B}$).

La transposée d'une matrice A se notera ${}^tA$.

On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel : si Y et Z sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$ avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ on pose $Y|Z = {}^tYZ = y_1z_1 + y_2z_2$; on définit également : $\|Y\| = \sqrt{Y|Y}$ la norme de Y.

Préliminaire

Vous pouvez utiliser votre calculatrice pour faire certains calculs à condition de le mentionner sur votre copie

P1a – Donner une relation entre les matrices P, X et U.

P1b – Considérons l'exemple suivant : $\vec{I} = 2\vec{i}$ et $\vec{J} = \vec{j}$. Justifier sommairement sans utiliser la relation ci-dessus qu'on a alors :

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}x \\ v = y \end{cases}.$$

Écrire la matrice P correspondante, puis vérifier sur cet exemple la validité de la formule obtenue au P1a.

P2 – Quelle est la nature de γ lorsque $\mathcal{B}$ est orthonormée ?

P3a – Pour $P_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donner la matrice inverse $Q_0 = P_0^{-1}$.

P3b – Calculer la matrice $A_0 = {}^tQ_0Q_0$. Déterminer les valeurs propres de A_0, puis donner une matrice orthogonale R_0 et une matrice diagonale D_0 telles que $R_0^{-1}A_0R_0 = D_0$.

P4 – Soient trois réels a, b et c vérifiant $ab - c^2 > 0$. Justifier sommairement que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $ax^2 + by^2 + 2cxy = 1$ (dans $\mathcal{B}_0$) est soit une ellipse, soit un cercle, soit l'ensemble vide.

Partie I

Étude d'un exemple

On suppose dans cette partie que $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On appelle $D_{\vec{I}}$ et $D_{\vec{J}}$ les droites engendrées respectivement par $\vec{I}$ et par $\vec{J}$. Soit s la symétrie par rapport à $D_{\vec{I}}$ et de direction $D_{\vec{J}}$.

I.1 – Donner les coordonnées u', v' dans $\mathcal{B}$ de $s\ \overrightarrow{m}$ en fonction des coordonnées u, v de $\vec{m}$ dans $\mathcal{B}$.

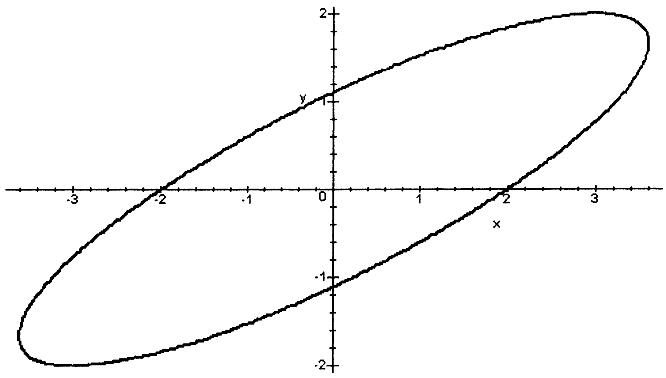
I.2 – On appelle γ^+ l'intersection de γ avec le demi-plan d'équation $v \geq 0$, ainsi que γ^- l'intersection de γ avec le demi-plan d'équation $v \leq 0$.

Justifier que $\gamma^- = s\ \gamma^+$, puis que γ est la réunion de γ^+ et de $s\ \gamma^+$.

I.3 – Prouver que si $\overrightarrow{m} \in \gamma$, alors $u \in -1;1$.

I.4 – Déterminer alors une fonction φ définie sur $-1;1$ telle que γ^+ soit la courbe représentative de φ dans la base $\mathcal{B}$.

I.5 – Le dessin de γ est le suivant :



Expliquer en quoi les résultats des questions I.1 à I.4 permettent de l'obtenir. Décrire quelle est la partie du dessin correspondant à γ^+.

I.6 – Donner l'expression des coordonnées u, v d'un vecteur $\vec{m}$ dans $\mathcal{B}$ en fonction de ses coordonnées x, y dans $\mathcal{B}_0$. En déduire qu'une équation de γ est :

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{13}{16}y^2 = 1.$$

I.7 – Justifier que γ est une ellipse dont on donnera un vecteur directeur de chacun des deux axes, les demi-longueurs a et b du grand et du petit axe, ainsi que l'excentricité e. *On pourra utiliser la réduction de la matrice A_0 de la question* P3.

Partie II

Détermination de la nature de γ dans le cas général

On revient au cas général. La matrice P désigne donc une matrice inversible quelconque d'ordre 2.

II.1 – Justifier que $\vec{m} \in \gamma$ si et seulement si ${}^tUU = 1$.

II.2 – On pose $Q = P^{-1}$ et $A = {}^tQQ$. Justifier que $\vec{m} \in \gamma$ si et seulement si ${}^tXAX = 1$.

II.3 – Montrer que A est symétrique. En déduire qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ dans laquelle l'équation de γ est : $\lambda_1 \; x'^2 + \lambda_2 \; y'^2 = 1$, où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A et où x', y' désigne les coordonnées de $\vec{m}$ dans $\mathcal{B}'$.

II.4 – Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Montrer que $\|QX\|^2 = \lambda \|X\|^2$. En déduire que les valeurs propres de A sont positives.

II.5 – Montrer que A est inversible ; en déduire que ses valeurs propres sont strictement positives.

II.6 – Justifier que γ est un cercle ou une ellipse dont les axes sont dirigés par les vecteurs propres de A.

Partie III

Une construction géométrique de γ

Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}_0$ est P et soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.
On pourra utiliser sans démonstration le théorème suivant :

> Si C est une courbe de $\mathcal{P}$ ayant pour tangente T en $\vec{a}$, et si φ est un endomorphisme bijectif de $\mathcal{P}$, alors $\varphi(C)$ est une courbe qui admet $\varphi(T)$ pour tangente en $\varphi(\vec{a})$.

On rappelle par ailleurs qu'on identifie le vecteur $\vec{a}$ avec le point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

III.1 – Soit $\vec{m}$ de coordonnées (x,y) dans $\mathcal{B}_0$. On appelle (u',v') les coordonnées de $f(\vec{m})$ dans $\mathcal{B}$.
Établir que $(x,y) = (u',v')$.

III.2 – En déduire que $\gamma = f(\mathcal{C})$.

III.3 – En utilisant la droite D d'équation $x = 1$ (dans $\mathcal{B}_0$), montrer que la droite Δ d'équation $u = 1$ (dans $\mathcal{B}$) est tangente à γ au point de coordonnées $(1,0)$ dans $\mathcal{B}$.
Déterminer de même la tangente à γ en trois autres points.

III.4 – Soit $\lambda \in]0;1[$.
On considère les deux droites $D_{1,\lambda}$ et $D_{2,\lambda}$ définies comme suit (les coordonnées sont données dans $\mathcal{B}_0$) :

- $D_{1,\lambda}$ passe par $A(1,0)$ et par $B_\lambda(1-\lambda,1)$.
- $D_{2,\lambda}$ passe par $C(-1,0)$ et par $D_\lambda(0,\lambda)$.

Prouver que $D_{1,\lambda}$ et $D_{2,\lambda}$ sont orthogonales.
Justifier alors que $D_{1,\lambda}$ et $D_{2,\lambda}$ sont sécantes en un point m_λ de $\mathcal{C}$, puis en déduire une construction du point $n_\lambda = f(m_\lambda)$.

III.5 – Construire par cette méthode sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet, l'ellipse obtenue pour la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On prendra pour ce faire différentes valeurs de λ entre 0 et 1 et on complétera la courbe obtenue par symétrie. On choisira 2 cm pour unité. On fera également figurer certaines tangentes remarquables.

III.6 – Soit K un parallélogramme et soit $\mathcal{A}(K)$ son aire. Montrer que l'aire de $f(K)$ est $|\det(f)|\mathcal{A}(K)$.
On admet que plus généralement, si K est une partie de $\mathcal{P}$ d'aire $\mathcal{A}(K)$ finie, alors l'aire de $f(K)$ est $|\det(f)|\mathcal{A}(K)$.
En déduire l'aire de la partie bornée du plan délimitée par γ.

Fin de l'énoncé