



---

**MATHEMATIQUES 1****Durée : 4 heures**

---

*Les calculatrices sont autorisées.*

\*\*\*\*

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\*\*\*\*

*Le sujet comporte 5 pages.***Notations :**

Pour tout nombre réel  $x$  tel que l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt$  converge, on note  $\varphi(x)$

la valeur de cette intégrale.

Pour tout entier naturel non nul  $m$  tel que l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$  converge, on

désigne par  $J_m$  sa valeur.

**Objectifs :**

L'objet de ce problème est d'étudier l'existence et un procédé de calcul éventuel de  $J_m$ .

La partie I est consacrée à l'étude de la fonction  $\varphi$  pour obtenir un résultat qui concerne  $J_1$ .

L'étude de l'existence de  $J_m$  fait l'objet de la partie II.

La partie III voit la mise en œuvre d'un procédé de calcul des intégrales  $J_m$  (lorsqu'elles convergent).

## PARTIE I

### Étude de la fonction $\varphi$

Rappel :  $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt$ .

On désigne par  $d$  (respectivement  $\delta$ ) la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $d(t) = t - 1 + \cos t$  (respectivement  $\delta(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t$ ).

#### I.1/ Étude des fonctions $d$ et $\delta$ .

I.1.1/ Étudier la fonction  $d$  ; en déduire qu'il existe un nombre réel  $\alpha$  tel que, pour tout nombre réel  $t$  strictement positif, on ait l'inégalité :  $0 \leq \frac{1 - \cos t}{t} \leq \alpha$ .

I.1.2/ Étudier la fonction  $\delta$  ; en déduire qu'il existe un nombre réel  $\beta$  tel que, pour tout nombre réel  $t$  strictement positif, on ait l'inégalité :  $0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \beta$ .

#### I.2/ Existence de la fonction $\varphi$ sur $]0 ; +\infty[$ .

Établir la convergence de l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ . En déduire que  $\varphi(x)$  existe pour tout  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ .

#### I.3/ Limite de la fonction $\varphi$ en $+\infty$ .

I.3.1/ Préciser le signe de  $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$  pour  $0 \leq x_1 \leq x_2$ . En déduire que la fonction  $\varphi$  admet une limite finie  $\lambda$  en  $+\infty$ .

I.3.2/ Déterminer la valeur de  $\lambda$  (on pourra utiliser I.1.2).

#### I.4/ Caractère $C^k$ de la fonction $\varphi$ .

I.4.1/ Montrer que la fonction  $\varphi$  est continue sur  $]0 ; +\infty[$ .

I.4.2/ Montrer que la fonction  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $]0 ; +\infty[$  (on pourra utiliser I.1.1).

I.4.3/ Montrer que la fonction  $\varphi'$  admet une limite finie (que l'on précisera) en  $+\infty$ .

I.4.4/ Montrer que la fonction  $\varphi$  est de classe  $C^2$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

I.4.5/ Expliciter  $\varphi''(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ .

I.4.6/ Expliciter  $\varphi'(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ . La fonction  $\varphi$  est-elle dérivable en 0 ?

**I.5/ Expression explicite de fonction  $\varphi(x)$ .**

**I.5.1/** Déterminer la limite de  $x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**I.5.2/** Expliciter une primitive de la fonction :  $x \mapsto \ln(x^2+1)$  (on pourra utiliser une intégration par parties).

**I.5.3/** Expliciter  $\varphi(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ .

**I.5.4/** Déterminer  $\varphi(0)$ .

## PARTIE II

### Étude de l'existence de $J_m$

Rappel :  $J_m = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$  et  $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt$ .

**II.1/ Étude de  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ .**

Justifier la convergence de l'intégrale généralisée  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$  pour tout entier naturel non nul  $m$ .

Pour tout entier relatif  $k$  tel que l'intégrale généralisée  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t} dt$  converge, on note  $I_k$  la valeur de cette intégrale.

**II.2/ Étude de  $J_1$ .**

Justifier l'existence de  $J_1$  et établir une relation entre  $J_1$  et  $\varphi(0)$  (on pourra utiliser une intégration par parties, en remarquant que  $(1-\cos)' = \sin$ ).

**II.3/ Étude de l'existence de  $I_k$ .**

Préciser la nature de l'intégrale généralisée  $I_k$  selon la valeur de l'entier relatif  $k$  (on pourra utiliser une intégration par parties).

**II.4/ Étude de la nature de  $J_m$**

Pour tout  $x$  appartenant à  $\left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$  et tout entier relatif  $k$ , on note :  $I_k(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^{ikt}}{t} dt$ .

**II.4.1/** Exprimer, pour tout entier naturel non nul  $m$  et pour tout nombre réel  $x$  appartenant à

$\left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$ , l'intégrale  $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(\sin t)^m}{t} dt$  à l'aide des intégrales  $I_k(x)$ .

II.4.2/ En déduire l'existence de  $J_{2p+1}$  pour tout entier naturel  $p$ .

II.4.3/ Quelle est la nature de l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p}}{t} dt$  pour  $p$  entier naturel non nul ?

## PARTIE III

### Calcul de $J_{2p+1}$

#### III.1/ Un développement de Fourier.

On désigne par  $x$  un nombre réel fixé, non multiple entier de  $\pi$ , par  $h_x$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles,  $2\pi$ -périodique et vérifiant :  $h_x(t) = \cos\left(\frac{x}{\pi}t\right)$  pour tout  $t \in ]-\pi; \pi]$ .

III.1.1/ Calculer les coefficients de Fourier réels  $a_n(h_x)$  et  $b_n(h_x)$  de la fonction  $h_x$ .

On rappelle que pour tout entier naturel  $n$  :

$$a_n(h_x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_x(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(h_x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_x(t) \sin(nt) dt.$$

III.1.2/ Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2 \pi^2}$  et déduire de III.1.1 la valeur

de la somme :  $\frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2 \pi^2}$ .

#### III.2/ Étude d'un procédé de calcul.

On désigne par  $f$  une fonction définie et continue sur  $[-1; 1]$  à valeurs réelles ; on suppose de plus que  $f$  est impaire et dérivable en 0.

Pour tout entier naturel non nul  $n$  on pose :

•  $\gamma_n = \int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \frac{f(\sin t)}{t} dt,$

•  $u_n$  l'application de  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $u_n(t) = (-1)^n \frac{2t f(\sin t)}{t^2 - n^2 \pi^2},$

•  $\mu_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(t) dt.$

III.2.1/ Déterminer la limite de  $\gamma_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

III.2.2/ Etablir (pour tout entier naturel non nul  $n$ ) une relation entre  $\gamma_n$  et  $\mu_n$ .

**III.2.3/** Établir la convergence, pour tout  $t$  appartenant à  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$  de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ .

Désormais on note  $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$  pour tout  $t$  appartenant à  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**III.2.4/** Montrer que la fonction  $S$  est continue sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**III.2.5/** Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \gamma_n$  et l'égalité  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n$ .

**III.2.6/** Justifier la convergence de l'intégrale généralisée  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt$  et l'égalité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt.$$

**III.2.7/** Justifier la convergence des intégrales généralisées  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t} dt$  et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{t} dt.$$

**III.2.8/** Exprimer la différence  $\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t} dt$  à l'aide de l'intégrale d'une fonction continue sur le segment  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**III.3/ Application au calcul de  $J_{2p+1}$ .**

**III.3.1/** En utilisant les résultats obtenus en III.1 et III.2 retrouver la valeur de  $J_1$  (déjà obtenue en II.2).

**III.3.2/** Calculer  $J_3$ .

**III.3.3/** Plus généralement expliciter  $J_{2p+1}$  pour tout entier naturel  $p$ .

**Fin de l'énoncé**





