SESSION 2009 **PCM2006**

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout ce problème, on note F la fonction sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall (x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \qquad F(x,z) = \exp\left(-zx - \frac{x^2}{2}\right),$$

et f la fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = F(x,0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

PARTIE I

I.1. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe fixé, quelconque.

I.1.1. Ecrire les développements en série entière de la variable réelle x des fonctions $x \mapsto \exp(-zx)$ et $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. On précisera les rayons de convergence des séries entières obtenues.

I.1.2. A l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que l'on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n ,$$

où A_n est une fonction polynomiale de degré n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction polynomiale H_n par $H_n = (-1)^n n! A_n$.
Donner les expressions de $H_0(z)$ et de $H_1(z)$ en fonction de z.

I.1.3. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto F(x,z)$ à l'aide de F.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ on a $H_{n+2}(z) = zH_{n+1}(z) - (n+1)H_n(z)$.
Donner les expressions de $H_2(z)$, $H_3(z)$ et $H_4(z)$ en fonction de z.

I.2.

I.2.1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\dfrac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(x) + x\dfrac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) + (n+1)\dfrac{d^n f}{dx^n}(x) = 0$.

I.2.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $K_n = \dfrac{(-1)^n}{f}\left(\dfrac{d^n f}{dx^n}\right)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $K_{n+2}(x) - xK_{n+1}(x) + (n+1)K_n(x) = 0$.
Exprimer $K_0(x)$ et $K_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $H_n = K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.3.

I.3.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H'_{n+1}(x) = (n+1)H_n(x)$.

I.3.2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0$.

I.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction φ_n de la variable réelle x par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_n(x) = (-1)^n H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\varphi''_n(x) - \dfrac{x^2}{4}\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x)$, où λ_n est un nombre réel que l'on déterminera.

I.5. Pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ on pose :

$$I_{p,q} = I_{q,p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_p(x)\varphi_q(x)dx = (-1)^{p+q}\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)f(x)dx.$$

I.5.1. Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ est bien définie pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
On admettra désormais que $I_{0,0} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi}$.

I.5.2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ un couple de nombres entiers. A l'aide d'une intégration par parties dûment justifiée, montrer que $I_{p+1,q+1} = (p+1)I_{p,q} = (q+1)I_{p,q}$.
En déduire la valeur de $I_{p,q}$ pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On distinguera les cas $q \neq p$ et $q = p$.

PARTIE II

Soit $\hat{f}$ la fonction de la variable réelle ν définie par :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, 2i\pi\nu)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)dt.$$

II.1. Montrer que $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

II.2. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

II.3.

II.3.1. Montrer que $\hat{f}'(\nu) = -4\pi^2\nu\hat{f}(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.
On pourra par exemple, entre autres méthodes, utiliser l'égalité $-t = 2i\pi\nu + (-2i\pi\nu - t)$.

II.3.2. Calculer $\hat{f}(0)$. En déduire l'expression de $\hat{f}(\nu)$ en fonction de ν.

PARTIE III

On considère la série de fonctions de terme général u_n défini par :

$$u_0 = f \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = f(x - 2n\pi) + f(x + 2n\pi).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit U_n la fonction définie par $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On remarquera que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $U_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} f(x - 2k\pi)$.

III.1. Soit A un nombre réel strictement positif.

III.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \frac{A}{2\pi}$. Etudier les variations sur le segment $[-A, +A]$ des fonctions $x \mapsto f(x - 2n\pi)$ et $x \mapsto f(x + 2n\pi)$.
En déduire que pour tout $x \in [-A, +A]$, on a $0 \leq u_n(x) \leq 2\exp\left(-\frac{(2n\pi - A)^2}{2}\right)$.

III.1.2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge normalement sur $[-A, +A]$.

III.2.

III.2.1. Déduire de la question précédente que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier. On note U sa somme.

III.2.2. Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$. On admettra que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

III.2.3. Montrer que U est paire.

III.2.4. Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U_n(x + 2\pi)$ au moyen de $U_n(x)$, $f(x + 2(n+1)\pi)$ et $f(x - 2n\pi)$. En déduire que U est périodique de période 2π.

III.3. Soit $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ la série de Fourier de U.

III.3.1. Justifier l'égalité de U avec la somme de sa série de Fourier.

III.3.2. Montrer que l'on a $\int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos nx \, dx = \int_{-(2k+1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(x) \cos nx \, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

III.3.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'égalité $\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos nx \, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos nx \, dx$.
En déduire que $\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos nx \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos nx \, dx$.

III.3.4. Déduire de ce qui précède une expression de a_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de $\hat{f}$ et de n, puis exprimer a_n en fonction de n.

Fin de l'énoncé