Les calculatrices sont autorisées

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLEME

Les parties **I**, **II** et **III** sont totalement indépendantes. La partie **IV** utilise certains résultats des parties **I**, **II** et **III**.

Notations

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à 3 lignes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On appelle vecteur colonne de $\mathbb{R}^3$ toute matrice à 3 lignes et 1 colonne à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note ${}^tM$ la transposée de la matrice M.

Partie I
Un exemple numérique

Dans cette partie, on se propose d'étudier le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S})\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & & & = & 3 \\ -x & + & 2y & - & z & = & -5 \\ & & -y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right.$$

1. Montrer que, si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système (S) s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ avec A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et B un vecteur colonne que l'on déterminera.

2. Calculer $\det(A)$. *On pourra utiliser la calculatrice.*
La matrice A est-elle inversible ?

3. Déterminer l'inverse A^{-1} de A. *On pourra utiliser la calculatrice.*

4. Montrer que le système (S) n'admet qu'une seule solution Q que l'on déterminera.

5. **a.** Montrer que le système (S) est équivalent au système $X = JX + K$ avec un vecteur colonne K de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera et la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Justifier sans calcul qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $J = PD\,{}^tP$.

c. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de J. En déduire les matrices P et D.

d. Pour tout entier naturel p, déterminer J^p en fonction de D et de la matrice P.

On définit la suite de vecteurs colonnes $(X^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ par $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N} : X^{(p+1)} = JX^{(p)} + K$$

On appelle $x^{(p)}$, $y^{(p)}$ et $z^{(p)}$ les composantes de $X^{(p)}$ c'est-à-dire $X^{(p)} = \begin{pmatrix} x^{(p)} \\ y^{(p)} \\ z^{(p)} \end{pmatrix}$. On pose enfin $\Delta^{(p)} = X^{(p)} - Q$.

6. Calculer les vecteurs colonnes $X^{(1)}$ et $\Delta^{(1)}$.

7. Ecrire un programme dans le langage de `Maple` ou `Mathematica` qui calcule le vecteur colonne $X^{(2008)}$.

8. **a.** En utilisant le fait que Q vérifie $Q = JQ + K$, montrer que pour tout entier naturel p, $\Delta^{(p+1)} = J\Delta^{(p)}$ puis que $\Delta^{(p)} = PD^p\,{}^tP\Delta^{(0)}$.

b. Soit $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^3$. On note $\|U\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ sa norme euclidienne. Montrer que pour tout entier naturel p, $\|D^pU\| \leqslant \dfrac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\|U\|$.

c. Exprimer $\|U\|$ en fonction de U et ${}^tU$ puis montrer que $\|PU\| = \|U\|$ et $\|{}^tPU\| = \|U\|$.

d. Déduire des questions précédentes que $\|\Delta^{(p)}\| \leqslant \dfrac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\|\Delta^{(0)}\|$ puis que $\|\Delta^{(p)}\| \leqslant \sqrt{\dfrac{13}{2^p}}$.

9. Prouver alors les trois inégalités :

$$|x^{(p)} - 1| \leqslant \sqrt{\frac{13}{2^p}} \quad ; \quad |y^{(p)} - (-1)| \leqslant \sqrt{\frac{13}{2^p}} \quad ; \quad |z^{(p)} - 2| \leqslant \sqrt{\frac{13}{2^p}}.$$

10. Quelles sont les limites respectives des suites $(x^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$, $(y^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(z^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$?

11. Déterminer une valeur de p à partir de laquelle le vecteur colonne $X^{(p)}$ est une valeur approchée de la solution exacte Q à 10^{-3} près, c'est-à-dire tel que $\|\Delta^{(p)}\| \leqslant 10^{-3}$.

Partie II

Un espace de matrices

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère les matrices

$$J(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } U(b) = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}.$$

On définit l'ensemble $E = \{J(a,b) \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On note $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité.

1. Montrer que E est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

2. Montrer que E est stable par produit matriciel c'est-à-dire que pour toutes matrices M et N de E, le produit MN appartient à E.

On suppose désormais que $b \neq 0$.

3. Justifier sans calcul que les matrices $J(a, b)$ et $U(b)$ sont diagonalisables.

4. Quel est le rang de la matrice $U(b)$? En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(U(b))$.

5. Déterminer un réel λ tel que $U(b) = J(a, b) - \lambda.I_3$.

6. En déduire une valeur propre de $J(a, b)$ et la dimension du sous-espace propre associé.

7. A l'aide de la trace, déterminer l'autre valeur propre de $J(a, b)$.

Partie III

Une norme matricielle

Si $M = (m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3 \\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note pour tout indice i de $\{1, 2, 3\}$, $l_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} |m_{ij}|$.

Autrement dit, l_i est la somme des valeurs absolues des coefficients de la ligne i de la matrice M. Puis, on définit le réel positif $\varphi(M)$ par $\varphi(M) = \max\{l_1, l_2, l_3\}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^3$ alors on définit la norme infinie du vecteur X par $\|X\|_\infty = \max\{|x|, |y|, |z|\}$.

1. **a.** Justifier que si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ alors $\varphi(A) = 6$.

   b. Justifier que si $U = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors $\|U\|_\infty = 4$.

2. **a.** On note $X' = MX$ avec $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Donner les expressions de x', y' et z' en fonction de x, y, z et des coefficients de la matrice M.

   b. Montrer que $|x'| \leqslant (|m_{11}| + |m_{12}| + |m_{13}|)\|X\|_\infty$. Déterminer de même une inégalité pour $|y'|$ et pour $|z'|$.

   c. En déduire que $\|MX\|_\infty \leqslant \varphi(M)\|X\|_\infty$ puis que, si M' désigne une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors $\|M'MX\|_\infty \leqslant \varphi(M')\varphi(M)\|X\|_\infty$.

Partie IV
La méthode de Jacobi

On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{lcl} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z & = & a \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z & = & b \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z & = & c \end{array} \right.$$

avec pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On suppose que le système (S) admet une unique solution notée $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$. On suppose de plus que $a_{1,1} \neq 0$ et $a_{2,2} \neq 0$ et $a_{3,3} \neq 0$.

1. Montrer que le système (S) est équivalent au système suivant :

$$(S_J) \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \qquad\qquad - \dfrac{a_{1,2}}{a_{1,1}}y - \dfrac{a_{1,3}}{a_{1,1}}z + \dfrac{a}{a_{1,1}} \\[2ex] y & = & -\dfrac{a_{2,1}}{a_{2,2}}x \qquad\qquad - \dfrac{a_{2,3}}{a_{2,2}}z + \dfrac{b}{a_{2,2}} \\[2ex] z & = & -\dfrac{a_{3,1}}{a_{3,3}}x - \dfrac{a_{3,2}}{a_{3,3}}y \qquad\qquad + \dfrac{c}{a_{3,3}} \end{array} \right.$$

2. Montrer que, si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système (S_J) peut se mettre sous la forme matricielle $X = JX + K$ avec J une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et K un vecteur colonne de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

Pour un système linéaire comportant un grand nombre d'équations et d'inconnues, les méthodes de résolution directe (comme celle du pivot de Gauss) aboutissant à une solution exacte deviennent très gourmandes en temps de calcul. Il est alors plus judicieux de calculer une solution approchée à l'aide d'une suite définie par récurrence convergeant vers la solution exacte, comme cela se fait dans la méthode de Jacobi que nous allons nous contenter d'illustrer sur un système 3×3.

On définit ainsi la suite de vecteurs $(X^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^3$ par la donnée d'un vecteur initial $X^{(0)}$ et la relation de récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N} : X^{(p+1)} = JX^{(p)} + K$$

On définit aussi la suite $(\Delta^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ par $\Delta^{(p)} = X^{(p)} - Q$. Le vecteur $\Delta^{(p)}$ permet d'apprécier l'erreur d'approximation entre la solution approchée $X^{(p)}$ et la solution exacte Q.

3. En utilisant le fait que Q est la solution de l'équation $(S_J) : X = JX + K$, montrer que pour tout entier naturel p, $\Delta^{(p+1)} = J\Delta^{(p)}$ puis $\|\Delta^{(p+1)}\|_\infty \leqslant \varphi(J)\|\Delta^{(p)}\|_\infty$.

4. En déduire que pour tout entier naturel p, $\|\Delta^{(p)}\|_\infty \leqslant (\varphi(J))^p\|\Delta^{(0)}\|_\infty$.

5. En déduire une condition suffisante (C_1) sur la matrice J pour que la suite $(\|\Delta^{(p)}\|_\infty)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

6. On pose pour tout entier naturel p : $X^{(p)} = \begin{pmatrix} x^{(p)} \\ y^{(p)} \\ z^{(p)} \end{pmatrix}$ et $\Delta^{(p)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(p)} \\ \beta^{(p)} \\ \gamma^{(p)} \end{pmatrix}$.

a. Montrer les trois inégalités :

$$|\alpha^{(p)}| \leqslant \|\Delta^{(p)}\|_\infty \quad ; \quad |\beta^{(p)}| \leqslant \|\Delta^{(p)}\|_\infty \quad ; \quad |\gamma^{(p)}| \leqslant \|\Delta^{(p)}\|_\infty.$$

b. Lorsque la condition (C_1) est vérifiée, montrer que les suites $(x^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$, $(y^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(z^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers q_1, q_2 et q_3.

7. La condition (C_1) est-elle vérifiée par la matrice J de la partie **I** ?

8. On revient au cas général. On suppose dans cette question que la matrice J est diagonalisable : il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $J = PDP^{-1}$.
On peut montrer alors, comme dans la partie **I** que, pour tout entier naturel p, $\Delta^{(p)} = PD^pP^{-1}\Delta^{(0)}$.

a. Montrer que $\|\Delta^{(p)}\|_\infty \leqslant \varphi(P)(\varphi(D))^p\varphi(P^{-1})\|\Delta^{(0)}\|_\infty$.

b. En déduire une condition suffisante (C_2) sur $\varphi(D)$ pour que la suite $(\|\Delta^{(p)}\|_\infty)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

c. La condition (C_2) est-elle vérifiée par la matrice D de la partie **I** ?

9. Dans cette question, on reprend l'exemple de la matrice $J(a,b)$ avec $b \neq 0$ définie à la partie **II**. On a vu que cette matrice est diagonalisable. Il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $J(a,b) = PDP^{-1}$.

a. Calculer $\varphi(J(a,b))$ et $\varphi(D)$.

b. La matrice $J\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right)$ vérifie-t-elle la condition (C_1) ? la condition (C_2) ?

c. Dessiner dans le plan l'ensemble des couples (a,b) de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient la condition (C_1) et ceux qui vérifient la condition (C_2).

Fin de l'énoncé