

*Les calculatrices sont autorisées.*

\*\*\*\*

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\*\*\*\*

*Le sujet comporte 6 pages.*

### **Notations :**

On note :

- $\mathbb{R}$  : l'ensemble des nombres réels,
- $\ln$  : la fonction logarithme népérien.

Pour tout nombre réel  $x$  tel que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{-1^{n+1}}{n^x}$  converge (resp. la série  $\sum_{n \geq 0} \ln 1 + e^{-nx}$  converge), on note  $\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^{n+1}}{n^x}$  (resp  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln 1 + e^{-nx}$ ) la somme de cette série.

### **Objectifs :**

On se propose d'étudier quelques propriétés des fonctions  $\theta$  et  $f$ .

Dans la partie I, on calcule trois valeurs exactes et une valeur approchée de  $\theta(n)$  pour quatre entiers naturels  $n$ . La partie II est consacrée à une étude de la fonction  $f$  en liaison avec  $\theta(2)$ . Dans la partie III, on étudie de façon plus précise la continuité et le caractère  $C^1$  de la fonction  $\theta$ .

## PARTIE I

### Quelques valeurs de la fonction $\theta$

#### I.1/ Calcul de $\theta 1$ .

**I.1.1/** Préciser, selon la valeur du nombre réel  $x$ , la limite de  $\frac{1}{n^x}$  lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$  .

**I.1.2/** Montrer que l'ensemble de définition de la fonction  $\theta$  est  $E = 0 ; +\infty$  .

**I.1.3/** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t^n dt$  .

**I.1.3.1/** Préciser une primitive de la fonction  $t \mapsto \tan t$  et calculer  $J_1$  .

**I.1.3.2/** Montrer que la suite  $J_n$  est convergente et préciser sa limite.

**I.1.3.3/** Calculer  $J_n + J_{n+2}$  pour tout entier naturel  $n$  .

**I.1.3.4/** En utilisant le résultat obtenu en I.1.3.3/, établir (par exemple par récurrence), pour tout entier naturel  $n$  non nul, la relation : 
$$\sum_{k=1}^n \frac{-1^{k+1}}{2k} = J_1 + (-1)^{n+1} J_{2n+1} .$$

**I.1.3.5/** En déduire la valeur de  $\theta 1$  .

#### I.2/ Une valeur approchée de $\theta 3$ .

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{-1^{k+1}}{k^3}$  .

**I.2.1/** Décrire, en français, un algorithme de calcul de  $S_n$  pour  $n$  entier naturel non nul donné.

**I.2.2/** En utilisant l'algorithme précédent et la calculatrice, donner la valeur décimale approchée par défaut  $\sigma$  de  $S_{30}$  à la précision  $10^{-4}$ .

**I.2.3/** Montrer que  $\sigma$  est aussi la valeur décimale approchée par défaut de  $\theta 3$  à la précision  $10^{-4}$ .

**I.3/ Calcul de  $\theta_2$  et  $\theta_4$ .**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles,  $2\pi$ -périodique et vérifiant :

$$g(x) = x^2 \text{ pour tout } x \in ]-\pi ; \pi[ .$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $\alpha_n = \int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx$ .

**I.3.1/** Calculer  $\alpha_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

**I.3.2/** Expliciter les coefficients de Fourier réels  $a_n(g)$  et  $b_n(g)$  de la fonction  $g$ .

On rappelle que pour tout entier naturel  $n$  :

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx \text{ et } b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx .$$

**I.3.3/** Justifier la convergence, pour tout  $x$  réel, de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{-1^n}{n^2} \cos nx$  et expliciter

sa somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^n}{n^2} \cos nx$  pour tout  $x \in ]-\pi ; \pi[$ .

**I.3.4/** En déduire la valeur de  $\theta_2$ .

**I.3.5/** Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$  et calculer la valeur de sa somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ .

**I.3.6/** En utilisant le résultat obtenu en I.3.3/, établir la convergence de la série

$\sum_{n \geq 1} \frac{-1^n}{n^3} \sin nx$  et expliciter sa somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^n}{n^3} \sin nx$  pour  $x \in ]-\pi ; \pi[$ .

**I.3.7/** Justifier, pour tout  $x$  réel, la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{-1^n}{n^4} \cos nx$  et calculer sa

somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^n}{n^4} \cos nx$  pour  $x \in ]-\pi ; \pi[$  en fonction de  $x$  et  $\theta_4$ .

**I.3.8/** En déduire la valeur de  $\theta_4$ .

## PARTIE II

### Etude d'une fonction

Pour tout entier naturel  $n$  et tout nombre réel  $x$ , on note  $u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$ .

Pour tout nombre réel  $x$  tel que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$  converge, on note  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  la somme de cette série. On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction  $f$  en utilisant en particulier

$$\theta_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^{n+1}}{n^2}.$$

**II.1/** Montrer que la fonction  $f$  est définie sur  $]0; +\infty[$ .

**On note désormais  $\mathcal{I}$  l'image par  $f$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ .**

**II.2/** Montrer que la fonction  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

**II.3/** Montrer que la fonction  $f$  est strictement monotone sur  $]0; +\infty[$ .

**II.4/** Justifier l'affirmation :  $\mathcal{I}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**II.5/** Montrer que la fonction  $f$  admet une limite finie  $\lambda$  (que l'on précisera) en  $+\infty$ .

**II.6/** Pour tout nombre réel  $x$  strictement positif, on désigne par  $\psi_x$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\psi_x(t) = \ln(1 + e^{-tx}).$$

**II.6.1/** Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt$ .

**II.6.2/** Etablir, pour tout nombre réel  $x > 0$ , la double inégalité :

$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt \leq f(x) \leq \ln 2 + \int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt.$$

**II.6.3/** Montrer l'existence de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy$  et exprimer sa valeur en fonction de  $\theta_2$ .

**II.6.4/** Montrer qu'il existe une constante  $\mu$  (que l'on précisera) telle que pour tout nombre réel  $x$  strictement positif, on ait la double inégalité :

$$\frac{\mu}{x} \leq f(x) \leq \lambda + \frac{\mu}{x}.$$

**II.6.5/** En déduire la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 et préciser l'intervalle  $\mathcal{C}$ .

## PARTIE III

### Propriétés de la fonction $\theta$

$$\text{Rappel : } \theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^{n+1}}{n^x}.$$

**III.1/** Montrer que pour tout nombre réel  $x$  de  $E = ]0 ; +\infty[$ , on a la double inégalité

$$1 - \frac{1}{2^x} \leq \theta(x) \leq 1.$$

**III.2/** En déduire que la fonction  $\theta$  est bornée sur  $E$  et qu'elle admet une limite finie en  $+\infty$  ; on précisera cette limite.

**III.3/ Continuité de la fonction  $\theta$ .**

**III.3.1/** En utilisant la notion de convergence normale, montrer que la fonction  $\theta$  est continue sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$ .

**III.3.2/** Montrer que la fonction  $\theta$  est continue sur  $E$ .

**III.4/ Caractère  $C^1$  de la fonction  $\theta$ .**

**III.4.1/** Soit  $x$  un nombre réel fixé strictement positif, on désigne par  $\varphi_x$  la fonction définie sur l'intervalle  $]2 ; +\infty[$  par  $\varphi_x(t) = \frac{\ln t}{t^x}$ .

Etudier les variations de la fonction  $\varphi_x$  sur l'intervalle  $]2 ; +\infty[$  ; on précisera l'étude dans les deux cas :

**III.4.1.1/** lorsque  $x \geq \frac{1}{\ln 2}$ .

**III.4.1.2/** lorsque  $x \in ]0 ; \frac{1}{\ln 2}[$ .

**III.4.2/** Démontrer de façon rigoureuse que la fonction  $\theta$  est de classe  $C^1$

**III.4.2.1/** sur l'intervalle  $\left[ \frac{1}{\ln 2} ; +\infty \right[$ ,

**III.4.2.2/** sur l'intervalle  $0 ; +\infty$  .

**III.4.3/** Déterminer le signe

**III.4.3.1/** de  $\theta' 2$  ,

**III.4.3.2/** de  $\theta' 1$  .

**Fin de l'énoncé.**