

Les calculatrices sont autorisées

NB. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations :

- \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels.
- \mathbb{C} désigne l'ensemble des nombres complexes.
- $C(I, K)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans K où K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
- $C^k(I, K)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^k de I dans K où K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
- $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$, à coefficients réels.

Convention : On convient d'identifier les fonctions polynômes au polynômes qui leur correspond.

Partie 1 : Quelques résultats préliminaires

1) On définit les fonctions φ et ψ de $[1, +\infty[$ dans \mathbb{R} respectivement par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \text{ et } \psi(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

1.1) Étudier les variations des fonctions φ et ψ , préciser leurs limites en $+\infty$.

En déduire le signe de chacune des fonctions sur $[1, +\infty[$.

1.2) On considère un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, du plan.

Représenter graphiquement les fonctions φ et ψ dans ce repère.

2) On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.

On note γ leur limite commune, le réel γ est appelé constante d'Euler, qu'on ne cherchera pas à calculer.

3) Soit n un entier naturel, on définit la fonction f de $]0, 1]$ dans \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1 - (1-x)^n}{x}$$

3.1) Montrer que la fonction f est intégrable sur $]0, 1]$.

3.2) Montrer que la fonction f est une fonction polynôme élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donner l'expression de f dans la base $(1, X, X^2, \dots, X^{n-1})$

3.3) Montrer que la famille $(1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donner l'expression de f dans cette base.

3.4) Calculer de deux façons différentes l'intégrale $I = \int_0^1 f(t) dt$.

Pour n entier naturel et p entier compris entre 0 et n , on note : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Déduire des deux expressions trouvées pour I que :

$$\sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1} \binom{n}{p}}{p} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}.$$

Partie 2 : Transformée de Laplace

Soit E l'ensemble des fonctions f élément de $C(]0, +\infty[, \mathbb{C})$, telles que :

- Pour tout réel a strictement positif, f est intégrable sur l'intervalle $]0, a]$.
- A chaque fonction f on peut associer $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, et $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall x \in [A, +\infty[, \quad |f(x)| \leq \beta x^n.$$

4) Soit x et a deux réels strictement positifs, calculer $\int_x^a \ln(t) dt$.

Montrer que la fonction logarithme est élément de E .

5) Montrer que l'ensemble E est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

6) Soit x un réel strictement positif.

Montrer que, si f est élément de E , alors la fonction φ_x définie de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{C} par $\varphi_x(t) = f(t)e^{-xt}$, est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On définit alors et on note $\mathcal{L}(f)$ la transformée de Laplace d'un élément f de E par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

7) Montrer que l'application \mathcal{L} définie sur E est une application linéaire.

8) Si f est élément de $C^1([0, +\infty[, \mathbb{C})$ tel que f' soit élément de E , calculer $\mathcal{L}(f')$ en fonction de $\mathcal{L}(f)$ et de $f(0)$.

9) Soit k un entier naturel, montrer que f_k définie de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} par $f_k(t) = t^k$, est élément de E .

Soit α un réel positif, on pose $I_k = \int_0^\alpha t^k e^{-xt} dt$.

Déterminer une relation de récurrence entre I_{k+1} et I_k .

En déduire la transformée de Laplace de f_k .

10) Soit ω un réel et f_ω l'application définie de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{C} par $f_\omega(t) = e^{i\omega t}$.

10.1) Montrer que f_ω est élément de E .

10.2) Calculer la transformée de Laplace de f_ω .

10.3) En déduire les transformées de Laplace des fonctions définies de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} par :

$$\cos_\omega(t) = \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \sin_\omega(t) = \sin(\omega t).$$

Partie 3 : Transformée de Laplace de la fonction de Bessel

On définit la fonction de Bessel de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$J(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta.$$

11) Montrer que J est élément de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, exprimer J' et J'' à l'aide d'une intégrale.

12) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad J'(t) = -\frac{t}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos(t \cos \theta) d\theta.$$

13) Montrer que l'application J est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle :

$$(E) : tJ'' + J' + tJ = 0.$$

14) Montrer que l'application J est élément de E défini dans la partie 2.

15) Soit x un réel strictement positif, on pose : $I(x) = \int_0^\pi \frac{d\theta}{x^2 + \cos^2 \theta}$.

15.1) Montrer que : $I(x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{x^2 + \cos^2 \theta}$.

15.2) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{x^2 + \cos^2 \theta}$. En déduire $I(x)$.

Indication : on peut faire le changement de variable $u = \tan \theta$.

16) On admet avoir le droit de permuter l'ordre d'intégration soit :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta \right) e^{-xt} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^{+\infty} \cos(t \cos \theta) e^{-xt} dt \right) d\theta.$$

Calculer la transformée de Laplace de l'application J .

Partie 4 : Transformée de Laplace de la fonction logarithme

17) Montrer que la fonction g définie de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} par $g(t) = e^{-t} \ln t$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

18) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x)x & \text{si } x \in]0, n[\\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

18.1) Montrer que :

$$\forall u \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+u) \leq u.$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq |U_n(x)| \leq e^{-x} |\ln(x)|.$$

18.2) Pour x réel strictement positif fixé, déterminer la limite de la suite $(U_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On admet que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} U_n(x) dx.$$

19) Soit n un entier naturel, on note $J_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt$.

19.1) Montrer l'existence de l'intégrale J_n .

19.2) Soit p un entier naturel et ε un élément de $]0, 1[$, calculer l'intégrale $\int_\varepsilon^1 u^p \ln(nu) du$, en

déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^1 u^p \ln(nu) du$ et calculer cette intégrale.

19.3) Soient n un entier naturel et p un entier compris entre 0 et n , montrer que :

$$\frac{1}{n+1} \binom{n+1}{p+1} = \frac{1}{p+1} \binom{n}{p}.$$

19.4) Utiliser le résultat de la question 3.4.) pour exprimer J_n en fonction de u_n défini dans la partie 1 question 2.

20) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx$ en fonction de la constante d'Euler.

21) Montrer que la transformée de Laplace de la fonction logarithme est définie sur $]0, +\infty[$ et calculer sa transformée de Laplace.

Fin de l'énoncé