

*Les calculatrices sont autorisées.*

\*\*\*\*

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.  
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\*\*\*\*

*Le sujet comporte 6 pages.*

**Notations :**

On note :

- $\mathbb{N}$  : l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{R}$  : l'ensemble des nombres réels,
- $e$  : le nombre réel dont le logarithme népérien est égal à 1.

Pour  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , on note  $|x|$  la valeur absolue de  $x$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $n!$  la factorielle de  $n$  avec la convention  $0! = 1$ .

Si  $j$  et  $n$  sont deux entiers naturels fixes tels que  $0 \leq j \leq n$ , on note :

- $\llbracket j, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers naturels  $k$  vérifiant  $j \leq k \leq n$ ,
- $\binom{n}{j}$  le nombre de parties ayant  $j$  éléments d'un ensemble de  $n$  éléments.

On rappelle que pour tout entier naturel  $j$  élément de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  on a :  $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ .

Si  $f$  est une fonction  $k$  fois dérivable sur un intervalle  $I$  (avec  $k \geq 1$ ) on note  $f'$  (resp.  $f^{(k)}$ ) sa fonction dérivée (resp. sa fonction dérivée  $k$ -ième).

Si  $u$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ , donc une suite réelle, on utilise la notation usuelle :  $u(n) = u_n$  pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ .

Soit  $x$  un nombre réel, on rappelle que s'il existe un nombre entier  $p$  qui vérifie  $|p - x| < \frac{1}{2}$  alors  $p$  est l'entier le plus proche de  $x$ .

### Objectifs :

L'objet du problème est d'une part d'établir, pour tout entier naturel non nul, un lien entre l'entier naturel  $\beta_n$  le plus proche de  $e^{-1}n!$  et le nombre  $\gamma_n$  d'éléments sans point fixe du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  et d'autre part, d'étudier l'écart  $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$ .

Dans la partie I on étudie  $\beta_n$  et on le caractérise grâce à une récurrence, dans la partie II on étudie  $\gamma_n$  et on établit un lien avec  $\beta_n$ . La partie III est consacrée à une estimation de  $\delta_n$  puis à une étude des deux séries  $\sum_{n \geq 0} \delta_n$  et  $\sum_{n=1} \frac{|\delta_n|}{n}$ .

## PARTIE I

### Les suites $\alpha$ et $\beta$

On définit la suite  $\alpha$  par  $\alpha_0 = 1$  et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}.$$

On rappelle que pour tout  $x$  réel, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  est convergente, et que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$  ; en particulier

$$\text{pour } x = -1 : \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note :  $\beta_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$  et  $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ .

#### I.1/ Étude de la suite $\alpha$ .

**I.1.1/** Expliciter  $\alpha_k$  pour  $k$  dans  $[[0,4]]$ .

**I.1.2/** Montrer que  $\alpha_n$  est un entier naturel pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

**I.2/ Étude de la suite  $\beta$ .**

**I.2.1/** Expliciter  $\beta_k$  pour  $k$  dans  $\llbracket 0,4 \rrbracket$ .

**I.2.2/** Montrer que  $\beta_n$  est un entier relatif pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

**I.2.3/** Expliciter  $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n$  en fonction de  $n$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

**I.2.4/** Comparer les deux suites  $\alpha$  et  $\beta$ .

**I.3/ Étude de  $\rho_n$ .**

**I.3.1/** Préciser le signe de  $\rho_n$  en fonction de l'entier naturel  $n$ .

**I.3.2/** Etablir, pour tout entier naturel  $n$ , l'inégalité suivante :  $n!|\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$ .

L'inégalité est-elle stricte ?

**I.3.3/** Dédurre de ce qui précède que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $\beta_n$  est l'entier naturel le plus proche de  $e^{-1}n!$ .

**I.4/ Étude d'une fonction.**

On désigne par  $f$  la fonction définie et de classe  $C^1$  (au moins) sur l'intervalle  $] -1 ; 1[$  à valeurs réelles, vérifiant les deux conditions :

$$f(0)=1 \text{ et pour tout } x \text{ de } ] -1 ; 1[ : (1-x)f'(x) - x f(x) = 0.$$

**I.4.1/** Justifier l'existence et l'unicité de la fonction  $f$ . Expliciter  $f(x)$  pour tout  $x$  de  $] -1 ; 1[$ .

**I.4.2/** Justifier l'affirmation : «  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1 ; 1[$  ».

**I.4.3/** Expliciter  $(1-x)f(x)$ , puis exprimer pour tout entier naturel  $n$  :

$$(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x) \text{ en fonction de } n \text{ et de } x.$$

**I.4.4/** En déduire une relation, valable pour tout entier naturel  $n$ , entre  $\beta_n$  et  $f^{(n)}(0)$ .

## PARTIE II

### La suite $\gamma$

Dans cette partie, on désigne par  $n$  un entier naturel.

Pour  $n \geq 1$  on note :

- $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,
- $\gamma_n$  le nombre d'éléments de  $\mathcal{S}_n$  sans point fixe ( $\tau$  appartenant à  $\mathcal{S}_n$  est sans point fixe si pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\tau(k) \neq k$ ).

Pour  $n=0$  on adopte la convention :  $\gamma_0=1$ .

**II.1/** Calculer  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

**II.2/** Classifier les éléments de  $\mathcal{S}_3$  selon leur nombre de points fixes et calculer  $\gamma_3$ .

**II.3/** On suppose dans cette question que  $n=4$ .

**II.3.1/** Quel est le nombre d'éléments  $\tau$  appartenant à  $\mathcal{S}_4$  ayant deux points fixes ?

**II.3.2/** Quel est le nombre d'éléments  $\tau$  appartenant à  $\mathcal{S}_4$  ayant un point fixe ?

**II.3.3/** Calculer  $\gamma_4$ .

**II.4/ Relation entre les  $\gamma_k$ .**

**II.4.1/** Rappeler sans justification le nombre d'éléments de  $\mathcal{S}_n$ .

**II.4.2/** Si  $0 \leq k \leq n$ , combien d'éléments de  $\mathcal{S}_n$  ont exactement  $k$  points fixes ?

**II.4.3/** Etablir pour tout entier naturel  $n$  la relation :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k = n!$ .

**II.5/** On considère la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$  et l'on pose  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$  lorsque la série converge.

**II.5.1/** Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à 1.

**II.5.2/** Pour tout  $x$  de  $] -1 ; 1[$ , on pose  $h(x) = g(x)e^x$ .

Justifier l'existence du développement en série entière de la fonction  $h$  sur  $] -1 ; 1[$  et expliciter ce développement.

**II.5.3/** Expliciter  $g(x)$  pour tout nombre réel  $x$  de  $] -1 ; 1[$ . En déduire la valeur du rayon

de convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ .

**II.5.4/** Comparer les deux suites  $\beta$  et  $\gamma$ .

**II.5.5/** La fonction  $g$  est-elle définie en 1 ?

**II.5.6/** La fonction  $g$  est-elle définie en  $-1$  ?

**II.5.7/** Calculer  $\gamma_8$ .

### PARTIE III

**Sur**  $\delta_n = e^{-1} n! - \beta_n$

Pour tout entier naturel  $n$  on note :

- $\delta_n = e^{-1} n! - \beta_n$ .
- $J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ .
- $v_n = (-1)^{n+1} J_n$ .

**III.1/ La série**  $\sum_{n \geq 0} v_n$ .

**III.1.1/** Quelle est la limite de  $J_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

**III.1.2/** Établir la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} v_n$ .

### III.2/ Estimation intégrale de $\delta_n$ .

III.2.1/ Justifier, pour tout nombre réel  $x$  et pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \quad (1).$$

III.2.2/ Dédurre de (1) l'expression de  $\delta_n$  en fonction de  $v_n$ .

### III.3/ Sur la série $\sum_{n \geq 0} \delta_n$ .

Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \delta_n$  ; la convergence est-elle absolue ?

### III.4/ Sur la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$ .

III.4.1/ Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$ .

III.4.2/ On pose  $A = -\int_0^1 e^x \ln(1-x) dx$ .

III.4.2.1/ Justifier la convergence de l'intégrale impropre  $A$ .

III.4.2.2/ Exprimer la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}$  en fonction de l'intégrale  $A$ .

III.4.3/ Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$  et expliciter la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2} \text{ en fonction de } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}.$$

III.4.4/ Expliciter un nombre rationnel  $\frac{p}{q}$  vérifiant  $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{600}$ .

**Fin de l'énoncé.**