*Les calculatrices sont interdites*

*N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**Problème**

**La partie I est indépendante de la suite du problème.**

**I) A)** On considère l'équation différentielle $(E_1)$ : $xy' - y = \ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

**1) a)** Résoudre l'équation homogène associée.

**b)** Déterminer une solution particulière de l'équation complète.

**c)** Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation $(E_1)$.

**2)** Préciser la solution f de l'équation $(E_1)$ telle que $f(1) = 0$.

**B)** On considère l'équation différentielle $(E_2)$ : $x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

**1) a)** Déterminer une solution de l'équation homogène associée de la forme $x \to x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

**b)** Chercher une autre solution de l'équation homogène associée de la forme : $y(x) = K(x)x^\alpha$, en donnant à $\alpha$ la valeur trouvée à la question précédente. On montrera que K' vérifie une équation différentielle du premier ordre.

**c)** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

**2) a)** Vérifier que la fonction $y_0$ définie par $y_0(x) = -1 - \ln(x)$ est une solution particulière de l'équation ($E_2$).

**b)** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation ($E_2$).

**3)** Démontrer que la fonction f (définie à la question A) 2)) est l'unique solution de l'équation ($E_2$) telle que $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$.

**II)** Etude de la fonction f.

**1)** f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x - 1 - \ln(x)$.

**a)** Etudier les variations de la fonction f.

**b)** Etudier les branches infinies de f et construire une allure de la représentation graphique.

**c)** Déduire de l'étude des variations de f que : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x - 1$.

**2) a)** Déterminer une primitive de la fonction f.

**b)** Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge et la calculer.

**c)** Quelle est la nature de l'intégrale : $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ ?

**III)** Comparaison des moyennes.

$a_1$, $a_2$, ........, $a_n$ étant n nombres réels strictement positifs, on appelle moyenne arithmétique de ces nombres le nombre réel $m_a$ défini par : $m_a = \dfrac{a_1 + ....... + a_n}{n}$.

On appelle moyenne géométrique le nombre réel $m_g$ défini par : $m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 .......a_n}$ .

On appelle moyenne harmonique le nombre réel $m_h$ défini par : $m_h = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + .......... + \dfrac{1}{a_n}}$.

**1) a)** En appliquant l'inégalité montrée à la question II) 1) c) aux réels $\dfrac{a_i}{m_a}$, montrer que $m_g \leq m_a$.

**b)** Dans quel cas a-t-on $m_g = m_a$ ?

**c)** Démontrer que pour tout triplet (x, y, z) de réels, on a :
$x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2 + x^2y^2z^4 - 4x^2y^2x^2 + 1 \geq 0$.

**2) a)** En appliquant l'inégalité vue en III 1) a) aux réels $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots\ldots, \frac{1}{a_n}$, montrer que $m_h \leq m_g$.

**b)** Dans quels cas a-t-on $m_h = m_g$ ?

**c)** Déduire des questions précédentes que $m_h \leq m_a$.

En déduire que, pour tous nombres réels strictement positifs $x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n$, on a :

$$(x_1 + \ldots\ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

**IV)** Applications.

**1)** Déduire de l'inégalité $m_g \leq m_a$ : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$.

**2) a)** Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$.

**b)** En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{dx}{x}$.

**c)** En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\frac{n}{1+\ln(n)} \leq \sqrt[n]{n!}$.

**3) a)** En déduire la limite de $\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers l'infini.

**b)** Montrer que la suite $\left(a_n\right)_{n \in N^*}$ de terme général $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ est bornée et en donner un encadrement à l'aide des questions précédentes.

**4) a)** Démontrer que la suite de terme général $\sqrt[n]{n!}$ est croissante (on pourra considérer la suite de terme général $\ln(\sqrt[n]{n!})$).

**b)** Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ ?

**V)** Détermination d'un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$.

**1) a)** k est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer un encadrement de ln(k) par deux intégrales de la fonction ln.

**b)** En déduire : $\int_1^n \ln(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \int_1^{n+1} \ln(t)dt$.

**c)** En déduire un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers l'infini.

**2)** Déterminer la nature des séries de termes généraux : $\frac{1}{(n!)^{1/n}}$ et $\frac{1}{(n!)^{2/n}}$.

**Fin de l'énoncé**