Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 6 pages.

Notations :

On note :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.

Pour z appartenant à $\mathbb{C}$, on note $|z|$ son module.
Pour tout entier naturel n, on note :

- $n!$ la factorielle de n avec la convention $0!=1$,
- $[\![0,n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $0 \leq k \leq n$,
- $\binom{n}{k}$ le nombre de parties ayant k éléments d'un ensemble de n éléments, pour $k \in [\![0,n]\!]$.

On rappelle :

- la valeur de $\binom{n}{k}$: $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$,

- la formule du binôme : si z_1 et z_2 sont des nombres complexes et n un entier naturel, alors : $(z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$.

Enfin si n est un entier naturel non nul on note σ_n la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$ et on pose $\sigma_0 = 0$.

Objectifs :

Dans les parties I et II on étudie un procédé de sommation, la partie III est consacrée à l'étude de diverses fonctions et en particulier une fonction φ à laquelle on applique ledit procédé de sommation.

Étude d'un procédé de sommation

Dans les parties I et II les notations utilisées sont les suivantes :
Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$.

Á toute suite complexe a, on associe la suite a^* définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.

L'objet des parties I et II est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$.

PARTIE I

Deux exemples

I.1/ Cas d'une suite constante.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$; on suppose que la suite a est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha$.

I.1.1/Expliciter $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.2/Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.3/La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} a_n^*$) est –elle convergente ?

I.2/ Cas d'une suite géométrique.
Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$.

I.2.1/Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

I.2.2/On suppose que $|z|<1$.

I.2.2.1/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

I.2.2.2/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

I.2.3/On suppose que $|z|\geq 1$.

I.2.3.1/ Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$?

I.2.3.2/ Quelle est la nature de $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ si $z=-2$?

I.2.3.3/ On suppose que $z=e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0<|\theta|<\pi$
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$.

PARTIE II

Étude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que la suite a est à valeurs réelles, la suite a^* étant toujours définie par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n^*=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$.

II.1/ Comparaison des convergences des deux suites.

II.1.1/ Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on considère un entier k <u>fixé</u>, $k\in[\![0,n]\!]$.

II.1.1.1/ Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.1.2/ En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.2/ Soient a une suite réelle et q un entier naturel <u>fixé</u>.
On considère pour $n>q$ la somme $S_q(n,a)=\sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n}$.
Quelle est la limite de $S_q(n,a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

II.1.3/ On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$;
Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.4/ On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

II.1.5/ La convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle équivalente à la convergence de la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$?

II.2/ Comparaison des convergences des séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n=2^n T_n$.

II.2.1/ Pour $n\in[\![0,3]\!]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k,
c'est à dire sous la forme $U_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}S_k$.

II.2.2/ On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k\in[\![0,n]\!]$:

$$(\mathfrak{E})\qquad U_n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}S_k \text{ pour } n\in\mathbb{N}.$$

II.2.2.1/ A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte tenu des résultats obtenus à la question **II.2.1** ?

II.2.2.2/ Etablir la formule $(\mathfrak{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$: $a_k=S_k-S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1}=0$).

II.2.3/ On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est convergente.

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

II.2.4/ La convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$?

PARTIE III

Une étude de fonctions

On rappelle que : $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_0 = 0$.

Pour x réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}; \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!}; \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n x^n .$$

III.1/ Étude de f.

III.1.1/ Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

III.1.2/ Expliciter $xf(x)$ pour tout x réel.

III.1.3/ Expliciter $e^{-x} f(x)$ pour tout x réel.

III.2/ Étude de g.

III.2.1/ Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

III.2.2/ On désigne par g' la dérivée de la fonction g ; exprimer $g' - g$ en fonction de f.

III.2.3/ Montrer que pour tout x réel :

$$g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt .$$

III.3/ La fonction F.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt .$$

III.3.1/ Montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter son développement.

III.3.2/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k!)(n-k)!}$.

Exprimer γ_n en fonction de n et σ_n.

III.4/ La série $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on note $\ln(n)$ le logarithme repérien de n.

III.4.1/ Soit $w_k=\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$

III.4.1.1/ Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} w_k$ est convergente.

III.4.1.2/ En déduire que la suite de terme général $\sigma_n-\ln(n)$ admet une limite finie (que l'on ne demande pas de calculer) lorsque n tend vers $+\infty$.

III.4.2/ Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$; exprimer τ_{2n} en fonction de σ_{2n} et σ_n.

III.4.3/ Montrer en utilisant III.4.1 et III.4.2 que la série $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et déterminer sa somme $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

III.5/ Étude de la fonction φ.

On rappelle que pour x réel $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sigma_n x^n$.

III.5.1/ Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 1}\sigma_n x^n$.

III.5.2/ Préciser l'ensemble de définition Δ de la fonction φ, et étudier ses variations sur $[0,R[$.

III.5.3/ **Valeur de** $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

En utilisant les résultats de la partie II et de la question III.4.3 expliciter la valeur de $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

III.5.4/ Expliciter $\varphi(x)$ pour x appartenant à Δ et retrouver la valeur de $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

Fin de l'énoncé