

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être un erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice I

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel.

1. On considère la série de terme général $u_n = \sin \left[(2 - \sqrt{3})^n \pi \right]$.

1.1. Montrer qu'elle est à termes positifs.

1.2. Etudier sa convergence.

2. On pose $A_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$; montrer que A_n est entier.

3. En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \sin \left[(2 + \sqrt{3})^n \pi \right]$.

4. Quel est le rayon de convergence R de la série de terme général $u_n x^n$; préciser les cas $x = \pm R$.

Exercice II

On rappelle que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

1. Calculer l'intégrale $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(au)}{u} du$ où a est un réel

2.

2.1. Justifier la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$

2.2. Calculer J .

3. On considère $K(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(au) \cdot \sin(bu)}{u^2} du$, où a et b sont des réels.

3.1. Exprimer $K(a,b)$ à l'aide de $I(a+b)$ et $I(a-b)$.

3.2. En déduire les valeurs de $K(a,b)$ en distinguant les différentes régions du plan (a,b) .

3.3. Donner une expression de $K(a,b)$ regroupant les différents cas.

Problème

Toutes les fonctions considérées dans les parties I, II et III de ce problème appartiennent à l'ensemble C^0 des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Partie I

On considère l'équation $(E_{1/2})$ d'inconnue f élément de C^0 :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (x+t)f(t) dt = g(x)$, où g est une fonction donnée de C^0 .

1. Soit f solution de l'équation $(E_{1/2})$

1.1 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + ax + b$, où a et b sont des réels qui s'expriment par des intégrales dépendant de f .

1.2. Ecrire en fonction de g le système d'équations vérifié par a et b .

2. En déduire a et b , puis f dans le cas où $g(x) = x$.

Partie II

On considère l'équation (E_λ) d'inconnue f élément de C^0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \lambda \int_{-1}^{+1} (x+t) f(t) dt = g(x) \text{ où } g \text{ est un élément donné de } C^0 \text{ et } \lambda \text{ un réel.}$$

1. En reprenant le procédé de la partie I, montrer que, sauf pour deux valeurs particulières λ_1 et λ_2 du paramètre λ , (E_λ) admet une solution unique pour toute fonction g .

2. A quelle condition sur g l'équation (E_{λ_1}) admet-elle des solutions ?

Même question pour (E_{λ_2}) .

3. Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{+1} (1-3t^2) dt$.

4. En déduire dans le cas $\lambda = \lambda_1$ (resp. $\lambda = \lambda_2$) un exemple de fonction g_1 (resp. g_2), non identiquement nulle, vérifiant la condition trouvée à la question 2 de la partie II.

5. On choisit pour g la fonction nulle.

5.1. Quelle est la solution de (E_λ) pour λ distinct de λ_1 et λ_2 ?

5.2. Exprimer f_1 et f_2 , solutions respectives de (E_{λ_1}) et (E_{λ_2}) .

5.3. Que dire de $\int_{-1}^{+1} f_1(t) f_2(t) dt$?

Partie III

On note K l'application qui à toute fonction h de C^0 associe la fonction Kh définie sur \mathbb{R} par :

$$[Kh](x) = \int_{-1}^{+1} k(x,t) h(t) dt, \text{ où } k \text{ est une fonction continue sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \text{ à valeurs réelles.}$$

1. Montrer que K est linéaire et que Kh est continue sur \mathbb{R} .

2. Comment l'équation $(E) : f(x) - \int_{-1}^{+1} k(x,t) f(t) dt = g(x)$ s'écrit-elle ?

3. On note $K^2 h = K[Kh]$ et $K^{n+1} h = K[K^n h]$. Montrer formellement, c'est-à-dire sans considération de convergence, que $f = g + \sum_{n \geq 1} K^n g$ est solution de l'équation (E) .

Tournez la page S.V.P.

4. On pose $k(x, t) = \frac{1}{2}(x+t)$ et $g(x) = x$.

4.1. Déterminer Kg puis K^2g .

4.2. Exprimer par récurrence $K^n g$, pour n entier naturel non nul.

5. En déduire f par application de la question 3, et retrouver ainsi le résultat de la question I.3.

Partie IV

Soit Δ un intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$ de \mathbb{R} , avec $\alpha < \beta$. Toutes les fonctions considérées dans cette partie, appartiennent à l'ensemble $C^0(\Delta)$ des fonctions continues sur Δ , à valeurs dans \mathbb{R} .

On considère l'application qui, au couple (F, G) de fonctions de $C^0(\Delta)$, fait correspondre le réel $\int_{\Delta} F(t)G(t)dt$.

Cette application définit un produit scalaire, noté \langle, \rangle . On notera $\| \cdot \|$ la norme associée.

1. On utilise les notations de la partie III, et on pose $k(x, t) = a(x)b(t) + a(t)b(x)$, où les fonctions a et b sont orthogonales entre elles : $\langle a, b \rangle = 0$, et normées : $\|a\| = \|b\| = 1$.

On pose $\varphi_1 = a + b$ et $\varphi_2 = a - b$. Vérifier que $K\varphi_1 = \varphi_1$ et $K\varphi_2 = -\varphi_2$. En déduire que 1 et -1 sont valeurs propres de K . Que peut-on dire alors de φ_1 et φ_2 ?

On admettra que 1 et -1 sont les seules valeurs propres non nulles de K , et que les espaces propres associés sont de dimension 1, engendrés respectivement par φ_1 et φ_2 .

2. On considère l'équation d'inconnue f élément de $C^0(\Delta)$: $f - \lambda Kf = g$, où g est une fonction donnée de $C^0(\Delta)$ et λ un réel non nul. On suppose qu'elle admet au moins une solution f_0 .

2.1. Montrer que si $\lambda \neq \pm 1$, cette solution est unique.

2.2. Ecrire l'ensemble des solutions si $\lambda = \pm 1$.

3. h étant une fonction donnée, montrer que Kh s'exprime comme combinaison linéaire des fonctions φ_1 et φ_2 .

4. Exprimer $K^n h$, pour n entier naturel non nul.

5. En déduire que, pour $0 < |\lambda| < 1$ la solution de l'équation $f - \lambda Kf = g$ obtenue sous la forme : $f = g + \sum_{n \geq 1} \lambda^n K^n g$ s'écrit $f = g + A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2$, où A_1 et A_2 sont sommes de séries géométriques.
6. Préciser f si g est orthogonal à la fois à φ_1 et à φ_2 .
7. Application : on choisit $\Delta = [-\pi, \pi]$, $k(x, t) = \frac{\sin(x+t)}{\pi}$, $g(x) = \sin 2x$;
- 7.1. Vérifier que k satisfait aux hypothèses de la question 1 de la partie IV.
- 7.2. Vérifier que g satisfait aux hypothèses de la question 6 de la partie IV.
- 7.3. Résoudre alors les équations : $f - \frac{1}{2}Kf = g$ et $f - Kf = g$.

Fin de l'énoncé