

**EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP**

---

**SCIENCES INDUSTRIELLES (S.I.)**

**Durée : 3 heures**

---

*Les calculatrices sont autorisées*

\* \* \*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

\* \* \*

## Etude du Plan Horizontal Réglable (PHR) de l'Airbus A340



Le thème proposé concerne l'aéronautique et plus particulièrement la commande en position du plan horizontal réglable (PHR) de l'Airbus A340.

Gros-porteur très long-courrier, ce quadriréacteur symbolise l'aboutissement de la politique de gamme menée par le constructeur européen depuis la commercialisation de son premier avion, l'A300.

Spécifications	A340-500	A340-600
Longueur	67,90 m	75,30 m
Envergure	63,45 m	63,45 m
Surface alaire	437 m <sup>2</sup>	437 m <sup>2</sup>
Capacité en sièges	313	378
Autonomie (km)/Nm	15.800/8.500	13.900/7.500
Poids au décollage	368 t	369 t
Capacité des réservoirs	214.800	194.880
Moteurs	Trent 553	Trent 556
Puissance des moteurs (lbs)	53.000	56.000

L'énoncé comporte trois parties indépendantes :

- La Partie 1, qui veut montrer la nécessité du Plan Horizontal Réglable (PHR), concerne surtout les notions de statique.
- La Partie 2 fait intervenir les notions de théorie des mécanismes, de cinématique et de dynamique qui sont aussi indépendantes entre elles.
- La Partie 3, qui s'intéresse à la commande du PHR, fait intervenir les notions d'asservissement.

Nous remercions la société AIRBUS usine de Toulouse et plus particulièrement le département EYCA pour la qualité de l'accueil qui nous a été réservé, la pertinence de l'information et la disponibilité lors de l'élaboration de ce document.

## PARTIE 1 : Généralités sur le vol des avions

### Les éléments d'un avion

Un avion, pour maîtriser sa trajectoire, possède différents éléments (voir Annexe 1) :

- les **ailerons ou gouverne de roulis** qui permettent d'agir sur le mouvement de roulis ou rotation autour de l'axe  $(G, \vec{x}_b)$  de l'avion,
- les **gouvernes de profondeur** qui ont une action sur le mouvement de tangage ou rotation autour de l'axe  $(G, \vec{y}_b)$ ,
- la **gouverne de direction** qui permet d'intervenir sur les mouvements de lacet ou rotation autour de l'axe  $(G, \vec{z}_b)$ .

En outre, l'**empennage (ou plan) horizontal réglable**, désigné par la suite PHR, aura un rôle particulier qui va être étudié tant dans sa structure mécanique que dans sa commande.

### Comment vole un avion

Les forces aérodynamiques dues à la vitesse  $V$  de l'avion s'exercent de façon dominante sur la voilure ou ailes.

Les profils ou sections droites de l'aile ne sont pas anodins, le bouleversement de l'écoulement d'air qu'ils provoquent doit créer des forces de pression d'où naîtra la capacité à se sustenter.

On distingue (voir Figure 1) :

- l'intrados où l'air est en surpression
- l'extrados où l'air est en dépression.

On désigne par :

- $A$  : le bord d'attaque,
- $B$  : le bord de fuite,
- $l$  : la longueur de la corde (la corde est le segment joignant le bord d'attaque  $A$  au bord de fuite du profil  $B$ ),
- $L$  : l'envergure ou longueur de l'aile,
- $D$  : le centre de poussée (ou point appartenant à la corde et à l'axe central du glisseur des actions aérodynamiques).

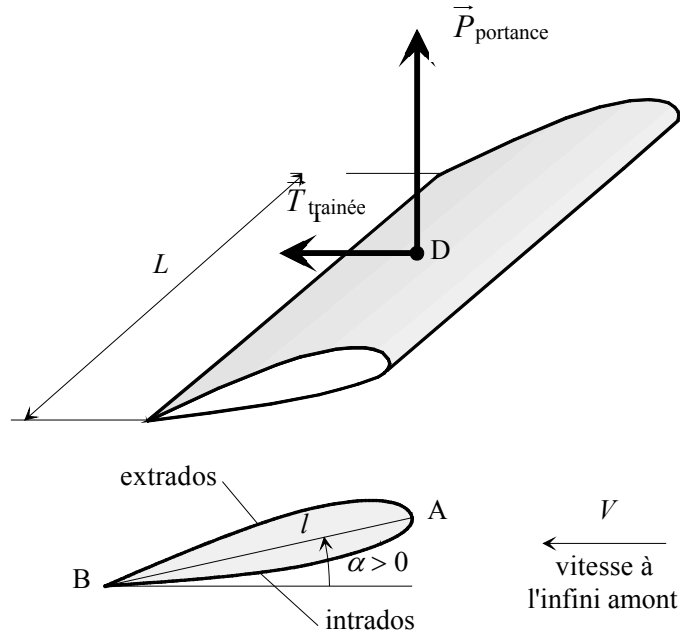


Figure 1 : profil d'aile dans un écoulement amont de vitesse  $V$

Au bilan, on aura la possibilité d'associer aux actions de l'air sur le profil de longueur ou envergure  $L$  un torseur de coordonnées :

$$D \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_{portance} + \vec{T}_{trainée} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

### Les repères et paramètres angulaires associés à l'avion

Afin d'étudier le comportement de l'avion, on met en place un certain nombre de repères (voir Figure 2) passant par le point  $G$ , centre de gravité de l'avion. On définit ainsi :

- un repère lié à l'avion  $(G, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$  tel que la corde du profil d'aile soit parallèle à  $\vec{x}_b$
- un repère aérodynamique  $(G, \vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$  tel que la vitesse de l'avion  $\vec{V} = V \cdot \vec{x}_a$
- un repère galiléen  $(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  où  $\vec{z}_0$  est la verticale descendante du lieu.

La mise en place de ces repères permet de définir, dans le cas d'un vol symétrique, c'est-à-dire dans le cas où le plan  $(G, \vec{x}_b, \vec{z}_b)$  est confondu avec le plan  $(G, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$ , les paramètres de position angulaire suivants (voir Figure 2) :

- l'assiette longitudinale ou angle  $\theta$  entre l'horizontale  $\vec{x}_0$  et l'axe  $\vec{x}_b$  de l'avion :
  - quand  $\theta$  augmente, on dit que l'avion se cabre,
  - quand  $\theta$  diminue, on dit que l'avion pique ;
- la pente  $\gamma$  ou angle entre l'horizontale  $\vec{x}_0$  et le vecteur vitesse  $V \cdot \vec{x}_a$  de l'avion,
- l'incidence  $\alpha$  ou angle  $(\vec{x}_a, \vec{x}_b)$ .

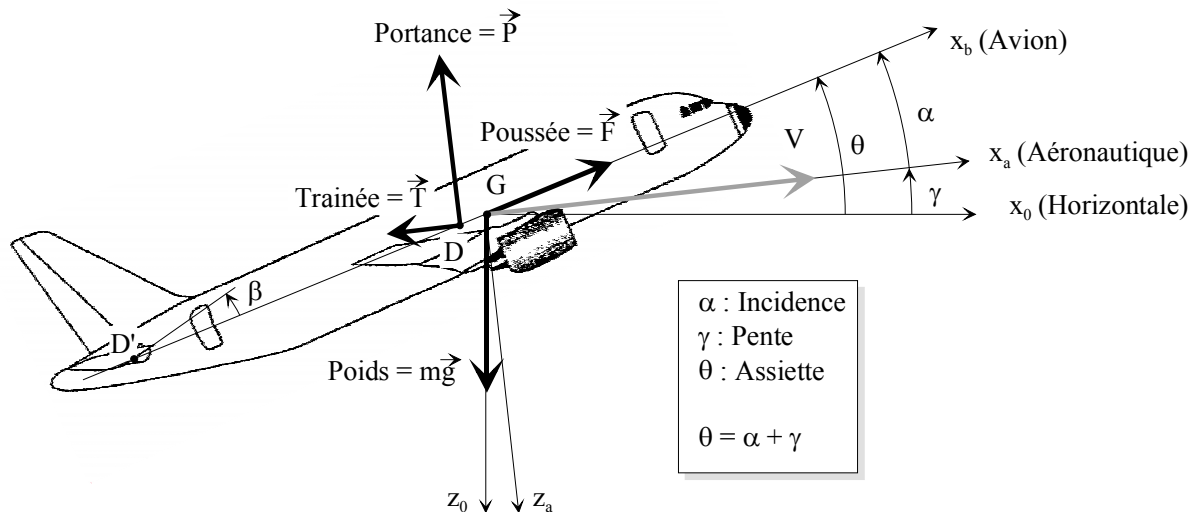


Figure 2 : Repères associés à l'avion

### Les forces appliquées à l'avion

Les forces appliquées à l'avion sont, entre autres :

#### a) les forces de portance et de traînée appliquées au centre de poussée $D$ de l'aile

$$\vec{P} \text{ portance} = \vec{P} = -P\vec{z}_a \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P > 0 \text{ si } \alpha > 0 \\ P < 0 \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\vec{T} \text{ traînée} = \vec{T} = -T\vec{x}_a \quad \text{avec} \quad T > 0$$

On établit que :

$$|P| = \rho \frac{C_z}{2} l L V^2$$

$$T = \rho \frac{C_x}{2} l L V^2$$

- $\rho$  désigne la masse volumique du lieu,
- $L$  est l'envergure du profil ou dimension suivant  $y_b$ ,
- $l$  est la longueur de la corde,
- $C_z$  est le coefficient de portance (pour un profil donné, il est essentiellement fonction de  $\alpha$ ),
- $C_x$  est le coefficient de traînée ou résistance à l'avancement.

**Question 1-1** : En considérant les courbes de l'annexe 2, dans la situation d'un avion lisse (volets et becs rentrés) :

- a) préciser comment varient  $C_z$  et  $C_x$  en fonction de  $\alpha$ .
- b) Indiquer les valeurs de  $C_z$  et  $C_x$  pour  $\alpha = 5^\circ$ .

b) le poids de l'avion agissant suivant  $(G, \vec{z}_0)$  et la force de poussée des réacteurs agissant suivant  $(G, \vec{x}_b)$ .

$$\vec{F} \text{ poids} = mg\vec{z}_0 \text{ où } m \text{ est la masse de l'avion chargé,}$$

$$\vec{F} \text{ poussée} = F\vec{x}_b.$$

### Stabilité de l'avion en vol symétrique

Le vol symétrique correspond à une situation où l'avion est symétrique par rapport à un plan vertical et où seul subsiste le mouvement de tangage. Cette rotation s'effectue autour de l'axe  $(G, \vec{y}_b)$ .

Le centre de gravité  $G$  se déplace vers l'avant ou vers l'arrière en fonction de la répartition de la charge marchande de l'avion, qui comprend :

- le fret chargé en soute,
- les passagers.

Dès lors, le centre de gravité  $G$  de l'avion chargé peut être :

- **cas 1** : en avant du centre de portance  $D$  :  $\vec{GD} = -d\vec{x}_b$  ( $d > 0$ )
- **cas 2** : en arrière du centre de portance  $D$  :  $\vec{GD} = d\vec{x}_b$

Le vol considéré est stationnaire (vitesse constante et les différents angles fixes). On verra que ceci est possible grâce à l'empennage horizontal. La force de propulsion  $\vec{F}$  est portée par  $(G, \vec{x}_b)$ . Une perturbation entraîne une augmentation brusque de  $\alpha$  qui prend la valeur instantanée  $\alpha_i$ .

**Question 1-2** : Expliquer pourquoi, dans le cas 2, cette perturbation va générer une instabilité dans l'équilibre de l'avion.

A la lumière de ce résultat, on comprendra :

- qu'il a été facile de satisfaire LINDBERGH qui voulait un avion instable pour rester éveillé lors de la traversée de l'Atlantique,
- pourquoi les pilotes des avions commerciaux actuels veillent au bon chargement de leur avion afin de toujours se placer dans le cas 1.

### Rôle du PHR

Le PHR, ou Plan Horizontal Réglable, peut être assimilé à une mini aile située à l'extrémité du fuselage de l'avion. Il subit donc, comme la voilure principale, une force de portance  $\vec{P}'$  et une force de traînée  $\vec{T}'$  appliquées au centre de poussée  $D'$  du PHR. On note  $\beta$  l'angle entre  $\vec{x}_b$  et la corde du PHR et  $\vec{GD}' = -d'\vec{x}_b$  ( $d' > 0$ ).

On considère la situation suivante (voir Figure 2) :

- le centre de gravité  $G$  est en avant du centre de portance,

- les réacteurs engendrent une poussée  $F \cdot \vec{x}_b$  (supposée portée par l'axe de l'avion),
- les points  $G, D$  et  $D'$  sont alignés sur l'axe  $(G, \vec{x}_b)$ .

On admet les lois :

$$\vec{P} = -C_1 V^2 \alpha \vec{z}_a$$

$$\vec{T} = -C_2 V^2 |\alpha| \vec{x}_a$$

$$\vec{P}' = -C_3 V^2 (\alpha + \beta) \vec{z}_a$$

$$\vec{T}' = -C_4 V^2 |\alpha + \beta| \vec{x}_a$$

**Question 1-3 :** En statique (trajectoire rectiligne de l'avion de pente  $\gamma = \gamma_0$ ) :

- Ecrire les équations traduisant l'équilibre de l'avion en projection sur  $(\vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$ . L'information de la coordonnée moment sera linéarisée.*
- Si  $\alpha > 0$ , en déduire que  $\vec{P}' \cdot \vec{z}_a$  est positif et que  $(\alpha + \beta) < 0$ .*
- En réglant  $\beta$ , montrer que, pour une vitesse donnée, les autres paramètres angulaires sont imposés.*

Le vol est maintenant toujours symétrique, mais avec une évolution dynamique des paramètres  $\alpha(t), \gamma(t), \dots$

Le vecteur vitesse du centre de gravité de l'avion par rapport à la terre  $R_0$  est :

$$\vec{V}_{(G \in \text{Avion} / R_0)} = V(t) \cdot \vec{x}_a$$

**Question 1-4 :** Déterminer l'expression du vecteur accélération  $\vec{a}_{(G \in \text{Avion} / R_0)}$ .

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on montrerait que, pour une vitesse donnée, il est possible, par réglage du PHR, de réduire la poussée des réacteurs et donc d'économiser du carburant.

## PARTIE 2 : Dispositif de commande mécanique du PHR

Les moteurs hydrauliques manoeuvrent la vis **4** (voir annexe 3) par l'intermédiaire d'un réducteur à engrenage. Cette vis est reliée à la structure avion **1** par l'intermédiaire d'une suspension à la CARDAN, c'est-à-dire que la pièce **3** est reliée par deux liaisons pivots en série, d'axes orthogonaux, à la structure **1**.

L'écrou **5** entraîne l'équerre **7**, solidaire du PHR, par l'intermédiaire d'une autre suspension à la CARDAN. Le PHR est lié à **1** par l'intermédiaire d'une liaison pivot.

**Question 2-1 :** *Quelles solutions technologiques pourrait-on préconiser afin d'éviter tout jeu entre la vis **4** et l'écrou **5**.*

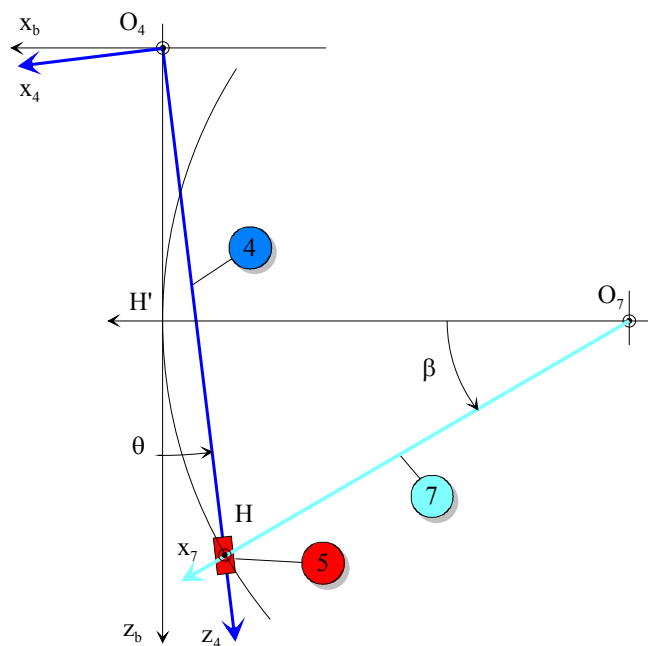
**Question 2-2 :** On considère les solides **2, 3, 4, 5, 6, 7**.

- Combien d'équations associées aux lois de la statique peut-on écrire ?
- Combien d'inconnues de liaison y figurent ?
- Quel théorème implique une relation entre le couple moteur  $C_m$  agissant sur la vis **4** et les forces  $P'$  et  $T'$  agissant sur le PHR ?
- En déduire que le montage de la commande mécanique du PHR est isostatique.

### Commande cinématique du PHR

On considère la

Figure 3 représentant la commande du PHR avec  $\beta$ , mesuré sur  $\vec{y}_b$ , négatif.





**Figure 3**

On pose :

$$O_4H = z(t)$$

$$\overrightarrow{O_4O_7} = -a.\vec{x}_b + b.\vec{z}_b$$

$$O_7H = a = cte$$

**Question 2-3 :** Démontrer la relation suivante :

$$z(t) = \sqrt{(b - a \sin \beta)^2 + a^2 (1 - \cos \beta)^2}$$

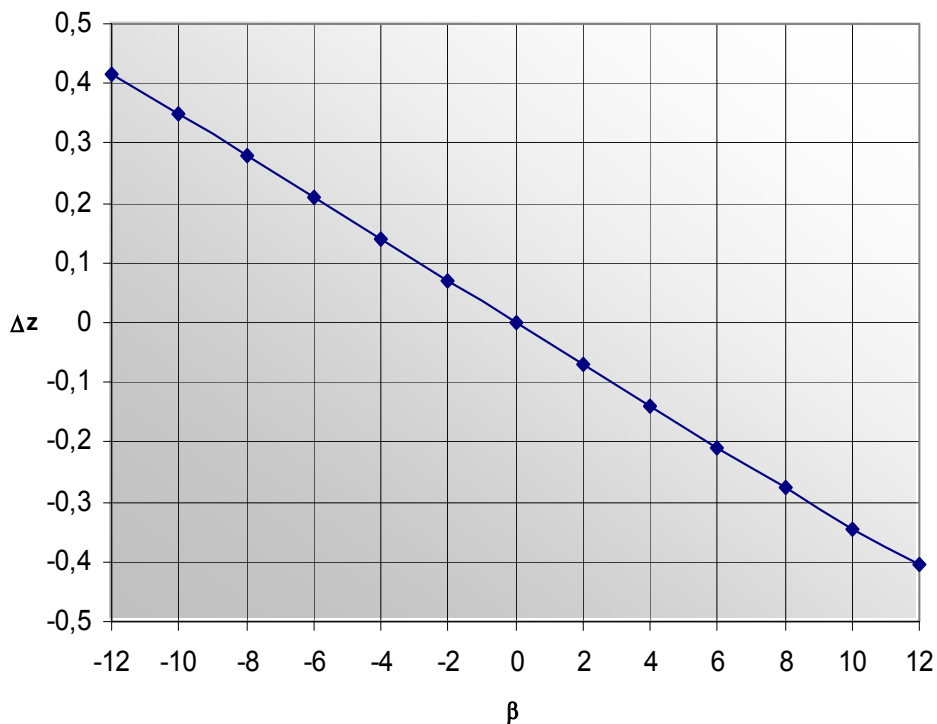
La tableau ci-dessous donne les évolutions de  $z(t)$  en fonction de  $\beta(t)$  pour des valeurs de  $\beta$  variant de  $-12^\circ$  à  $+12^\circ$ ,  $a = 2$  m et  $b = 0,5$  m.  $\Delta z(t)$  correspond au déplacement relatif de l'écrou par rapport à sa position initiale pour laquelle  $\beta = 0^\circ$ . La courbe  $\Delta z = f(\beta)$  montre bien que cette évolution peut être considérée comme étant linéaire. Dès lors, on peut écrire :

$$\beta(\text{rad}) = K_v \cdot \Delta z(\text{m})$$

**Question 2-4 :** Sachant que l'angle d'inclinaison  $\beta$  du PHR doit être compris entre  $-12$  et  $4^\circ$ , en déduire :

- la valeur de  $K_v$ ,
- la longueur utile de la vis.

$\beta$ (degrés)	-12	-8	-4	0	4	8	12
$z$ (mètres)	0,917	0,779	0,64	0,5	0,361	0,223	0,095
$\Delta z$ (mètres)	0,417	0,279	0,14	0	-0,139	-0,277	-0,405



**Question 2-5 :** En exploitant la particularité pour  $H$  d'être commun aux pièces 5 et 7, exprimer :

- $\vec{V}(H \in 5/R_b)$ . On désignera par  $p_v$  le pas de la vis et par  $\omega_v$  sa vitesse de rotation propre.
- $\vec{V}(H \in 7/R_b)$ , c'est-à-dire la vitesse du point  $H$  considéré comme appartenant à la pièce 7 dans son mouvement dans  $R_b$ .

### Comportement dynamique du PHR

On admet le modèle suivant :

- le PHR est considéré comme un solide rigide d'inertie  $I_0$  par rapport à son axe de rotation.
- La vis de manœuvre, représentée ici par le segment  $RH$ , est un élément déformable de raideur  $k$ , de longueur libre  $l_0$ . On considère la position de calage « zéro » (Figure 4-a), la corde du PHR est alors confondue avec  $\vec{x}_b$ . Les forces de pesanteur sont négligées devant les autres effets.

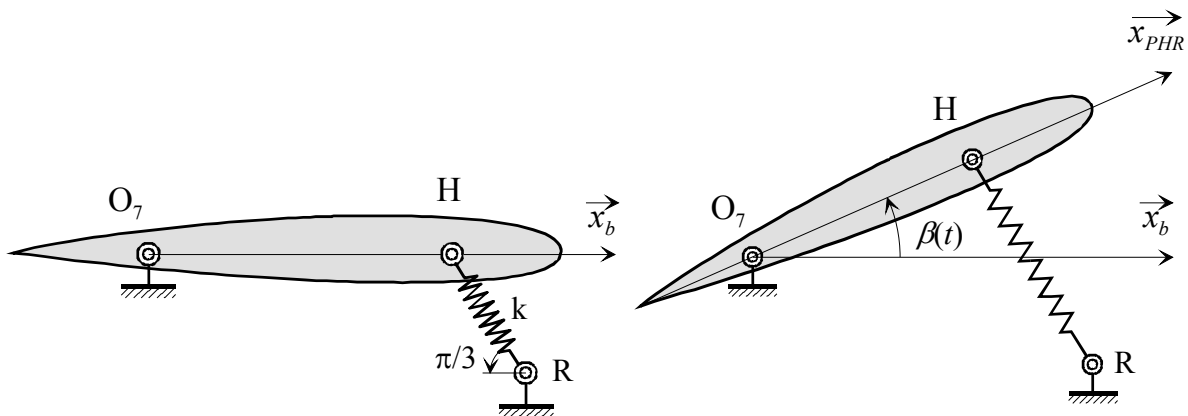


Figure 4-a

Figure 4-b

**Question 2-6 :** Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de  $\beta(t)$  quand, écarté de sa position (voir Figure 4-b), le PHR oscille dans le cadre de son mouvement propre.

Nota : On désignera par  $H$  la longueur  $O_7H$ . Les angles  $\beta$  sont considérés comme petits et la droite  $RH$  n'évoluera pas en position.

**Question 2-7 :** Sous l'action de turbulences, dans la même configuration, le PHR est soumis à des actions aérodynamiques pulsées dont l'effet se traduit par un moment pulsé (par rapport à l'axe de rotation du PHR) d'expression  $\rho_1 \sin(\omega_e t)$ .

- Déterminer l'expression de l'amplitude du mouvement du PHR (valeur maxi de  $\beta$ )
- Quelle consigne donner au bureau d'études pour limiter cette amplitude ?

La déformabilité de la partie centrale du PHR entraîne le schéma associé au comportement dynamique du PHR (voir Figure 5).

La partie tribord ou zone  $y_b > 0$  a une inertie  $I_1$  par rapport à l'axe de rotation, le paramètre de position est  $\beta_1$ , la partie bâbord ou zone  $y_b < 0$  a une inertie  $I_2$  par rapport à l'axe de rotation et un paramètre de position  $\beta_2$ .

Ces deux régions, dont on négligera les forces de pesanteur devant les autres efforts, sont reliées par une pièce cylindrique dont on négligera l'inertie mais de raideur de torsion  $k_c$ , c'est-à-dire que si  $\beta_1$  est différent de  $\beta_2$ , cette pièce applique un moment proportionnel à  $(\beta_1 - \beta_2)$  sur les deux parties du PHR.

La commande mécanique est modélisée ici pour chacune des deux parties par un ressort d'axe parallèle à  $\vec{z}_b$  et de raideur  $k/2$  distant de l'axe de rotation du PHR de la quantité  $H$ .

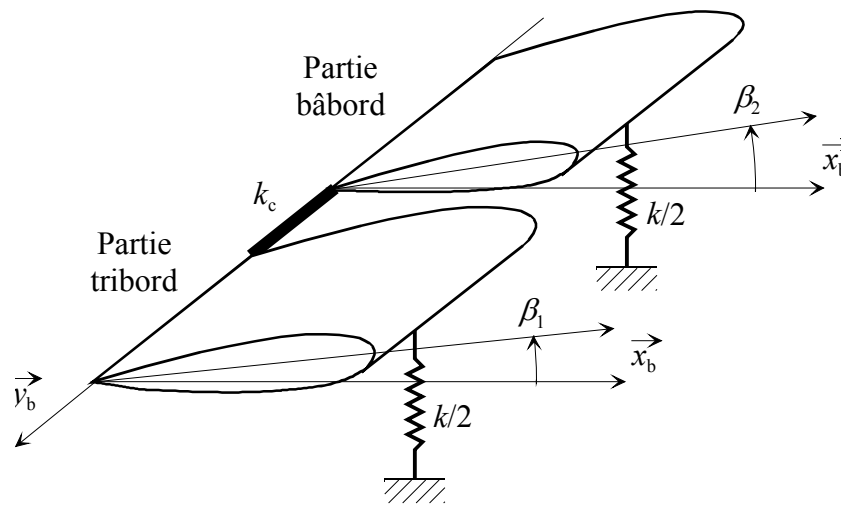


Figure 5

**Question 2-8 :** Dans le cadre de petits mouvements autour de la position zéro (les deux ressorts ont alors la longueur « libre »), déterminer les équations régissant les évolutions de  $\beta_1$  et de  $\beta_2$ .

### PARTIE 3 : Système de commande asservie du PHR

Afin de répondre aux exigences de fiabilité qui stipulent, en particulier, que le PHR doit pouvoir fonctionner durant  $10^9$  FH (Fly Hour) sans subir de défaillance, un certain nombre de composants de la chaîne de commande du PHR sont doublés ou triplés suivant les cas.

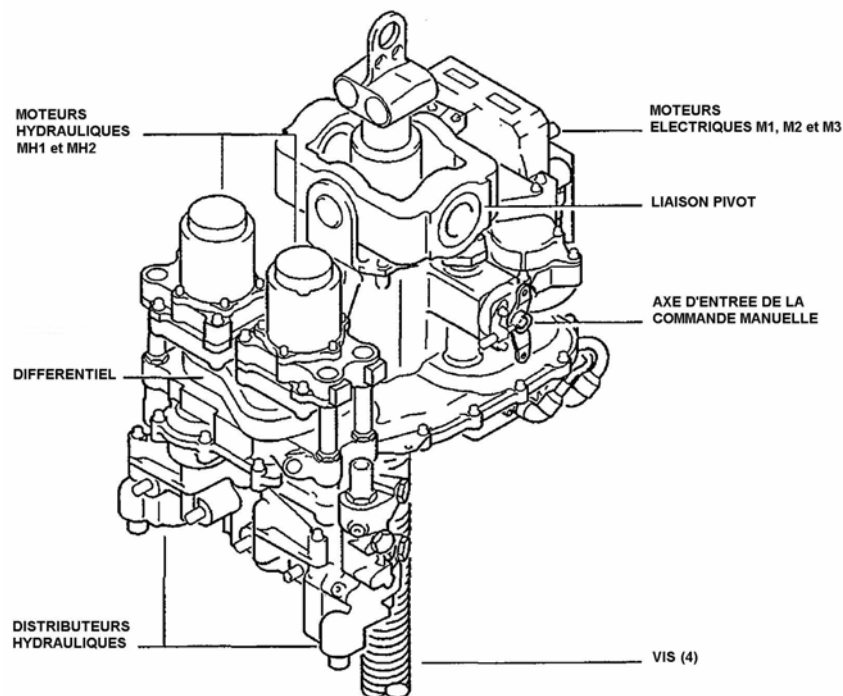
D'autre part, toujours par souci de sécurité, le PHR peut être commandé :

- soit automatiquement par un ordinateur de bord qui détermine, à partir des paramètres du vol, la valeur optimale de l'angle  $\beta$ ,
- soit manuellement par le pilote à partir d'un volant de commande situé dans le poste de pilotage et ce en cas de défaillance de la commande automatique du PHR.

Dans les deux cas, les consignes émises par le calculateur ou par le pilote agissent sur les tiroirs des distributeurs alimentant deux moteurs hydrauliques fonctionnant simultanément et dont les arbres de sortie entraînent, via un différentiel et un réducteur, la rotation de la vis 4 et donc celle du PHR.

En raison de sa complexité, on se limitera, dans le cadre de ce sujet, à une étude « simplifiée » de l'asservissement en position angulaire de la vis 4 agissant sur le PHR.

La figure ci-dessous présente globalement la situation des différents éléments intervenant dans cette étude : les moteurs hydrauliques, le différentiel, les distributeurs, les moteurs électriques (au nombre de trois par sécurité, mais un seul fonctionne à un instant donné), la vis 4.



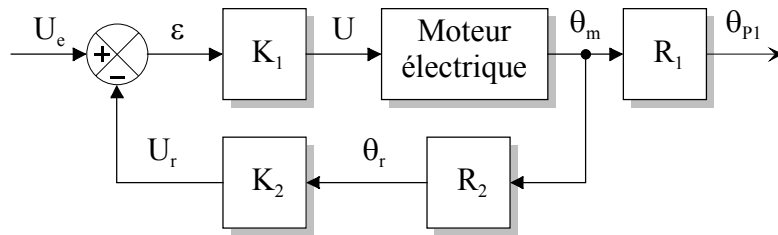
L'annexe 4 présente :

- le schéma de principe du système de commande de la vis 4,
- le schéma bloc de l'asservissement en position de la vis 4.

La correspondance des couleurs entre les deux figures facilite le repérage des différents constituants.

## Etude de la boucle d'asservissement en position du moteur électrique

Cette boucle d'asservissement est représentée ci-dessous :



Le rapport de transmission du réducteur **1** est  $R_1 = \frac{1}{150}$ .

Le moteur électrique est un moteur à courant continu dont les équations caractéristiques sont :

- Equations électriques liant la tension  $u$  aux bornes du moteur et le courant  $i$  le traversant :

$$\begin{cases} u(t) = R.i(t) + e(t) \\ e(t) = k_e.\omega_m(t) \end{cases}$$

- Equation mécanique liant le courant  $i$  et la vitesse angulaire du moteur  $\omega_m$  :

$$J_e \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = k_a.i(t)$$

Avec :

- $R$  : résistance de l'induit  $R = 1 \Omega$
- $J_e$  : inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur  $J_e = 4.10^{-6} \text{ kg.m}^2$
- $k_e$  : constante de force contre électromotrice  $k_e = 0,02 \text{ V}/(\text{rad/s})$
- $k_a$  : constante de couple  $k_a = 0,02 \text{ Nm/A}$

### Question 3-1 : Fonction de transfert du moteur

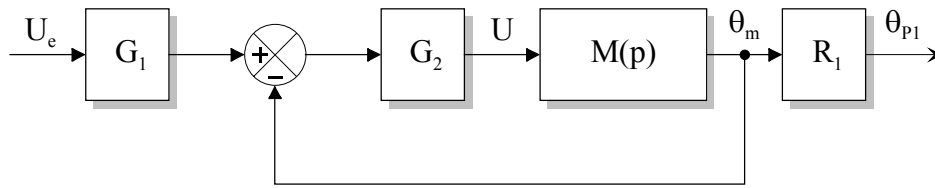
- a) Déterminer la fonction de transfert  $M(p) = \frac{\theta_m(p)}{U(p)}$  du moteur électrique et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$M(p) = \frac{\theta_m(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{p(1 + \tau_m \cdot p)}$$

- b) Donner les expressions littérales de  $K_m$  et  $\tau_m$ .  
c) Application numérique : calculer  $K_m$  et  $\tau_m$  en précisant leurs unités.

**Question 3-2** : Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p) = \frac{U_r}{\varepsilon}$  et en déduire l'expression du gain de boucle  $K_{BO}$ .

Le schéma bloc est simplifié de la façon suivante afin de rendre unitaire la boucle de retour :



**Question 3-3** : Fonction de transfert en boucle fermée

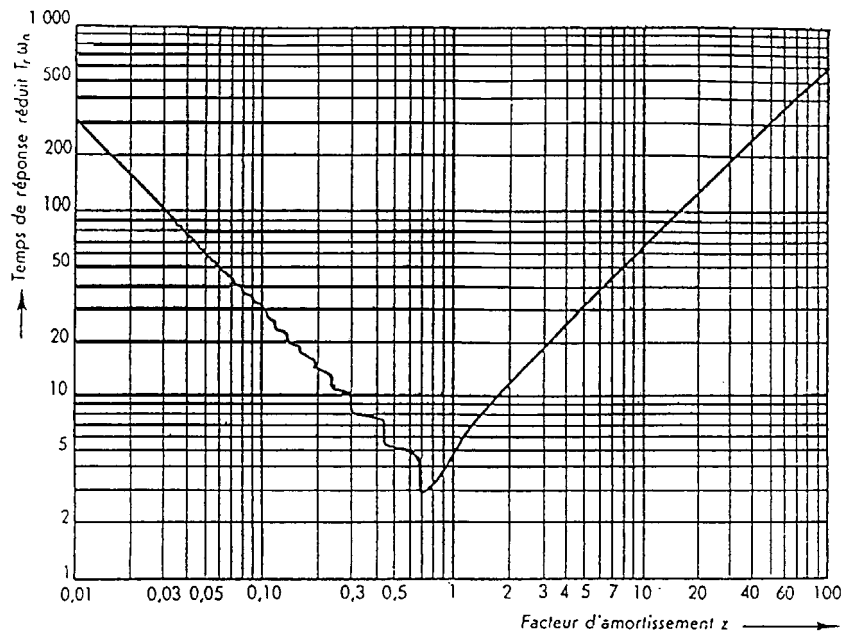
- Donner les expressions des transmittances  $G_1$  et  $G_2$ .
- En déduire la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p) = \frac{\theta_{p1}}{U_e}$  et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :

$$F(p) = \frac{K_{BF}}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

- Donner l'expression littérale de  $K_{BF}$  et celles de  $\xi$  et  $\omega_0$  en fonction de  $K_{BO}$  et  $\tau_m$ .

**Question 3-4** : Analyse des performances

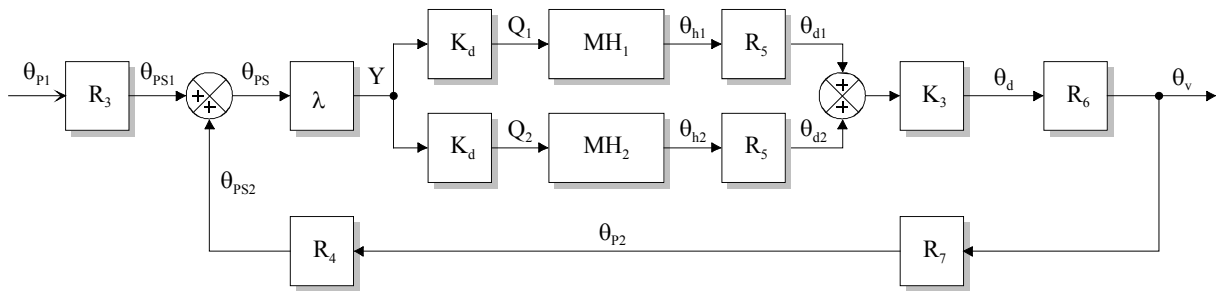
- Déterminer la valeur du gain de boucle  $K_{BO}$  de telle sorte que la réponse à une entrée de type échelon soit la plus rapide possible sans toutefois produire de dépassement.
- Quel est alors l'écart de position  $\varepsilon_s$  ?
- Déterminer le temps de réponse à 5% à l'aide de la Figure 6.
- Déterminer la marge de phase  $M\varphi^\circ$  pour cette valeur de  $K_{BO}$ .



**Figure 6** : Abaque  $T_r \cdot \omega_n = f(\xi)$

## Etude de l'asservissement en position de la vis (4)

La boucle d'asservissement est représentée ci-dessous :



Le fonctionnement de ce dispositif peut se décomposer en deux phases :

**Phase 1** : suite à une rotation d'un angle  $\theta_m$  de l'axe du moteur électrique, le planétaire couronne  $P_1$  du train épicycloïdal tourne d'un angle  $\theta_{p1}$ . Lors de cette rotation, on considère que le planétaire pignon  $P_2$ , lié à la vis, reste immobile ( $\omega_{p2} = 0$ ), le porte satellite  $PS$  tourne d'un angle  $\theta_{PS1} = R_3 \cdot \theta_{p1}$  ce qui provoque l'ouverture des tiroirs des distributeurs et l'alimentation des moteurs hydrauliques.

**Phase 2** : les moteurs hydrauliques étant désormais alimentés, leur rotation entraîne celle de la vis 4 via le différentiel et le réducteur 6. La rotation de la vis entraîne celle du planétaire pignon  $P_2$  du train épicycloïdal d'un angle  $\theta_{p2}$ . Lors de cette rotation, on considère que le planétaire couronne  $P_1$  reste immobile ( $\omega_{p1} = 0$ ), le porte satellite  $PS$  tourne en sens inverse d'un angle  $\theta_{PS2} = R_4 \cdot \theta_{p2}$  ce qui provoque la fermeture des tiroirs des distributeurs et l'arrêt de la rotation de la vis.

La rotation du porte satellite  $PS$  résultant de ces deux rotations est telle que :  $\theta_{PS} = \theta_{PS1} + \theta_{PS2}$ .

**Question 3-5** : Fonction de transfert du train épicycloïdal

a) A l'aide de la description du fonctionnement donnée ci-dessus et des indications fournies en annexe 5 (formule de Willis), déterminer les rapports de transmission  $R_3$  et  $R_4$  du train épicycloïdal.

b) Application numérique. On donne :

▪ nombre de dents du planétaire couronne  $P_1$  :  $Z_1 = 52$

▪ nombre de dents du planétaire pignon  $P_2$  :  $Z_2 = 20$ .

Calculer les rapports de transmission  $R_3$  et  $R_4$  en les écrivant sous la forme  $R_i = \frac{1}{n_i}$ .

**Indépendamment des valeurs trouvées à la question précédente, nous admettons, pour la suite du sujet, les valeurs suivantes des rapports de transmission  $R_3$  et  $R_4$  :**

$$R_3 = \frac{\theta_{PS1}}{\theta_{P1}} = \frac{1}{1,4} \qquad R_4 = \frac{\theta_{PS2}}{\theta_{P2}} = \frac{1}{3,5}$$



**Question 3-6 :** Déterminer de même les rapports de transmission  $R_5 = \frac{\theta_{d1}}{\theta_{h1}} = \frac{\theta_{d2}}{\theta_{h2}}$  du différentiel,  $R_6 = \frac{\theta_v}{\theta_d}$  et  $R_7 = \frac{\theta_{p2}}{\theta_v}$  des réducteurs 6 et 7 (le nombre de dents  $Z_i$  de chaque pignon est indiqué entre parenthèses sur le schéma de l'annexe 4).

**Question 3-7 :** Fonction de transfert du différentiel.

- A l'aide des indications fournies en annexe 5, déterminer la relation  $\theta_d = f(\theta_{d1}, \theta_{d2})$ . En déduire la valeur du gain  $K_3$  du différentiel.
- Quelle conséquence, avec un tel dispositif, aurait une défaillance d'un moteur hydraulique sur le couple transmis en sortie du différentiel ?
- Les moteurs hydrauliques (voir Figure 8) ayant la même fonction de transfert  $M_h(p)$ , justifier que le schéma bloc puisse se mettre sous la forme de celui représenté Figure 7.

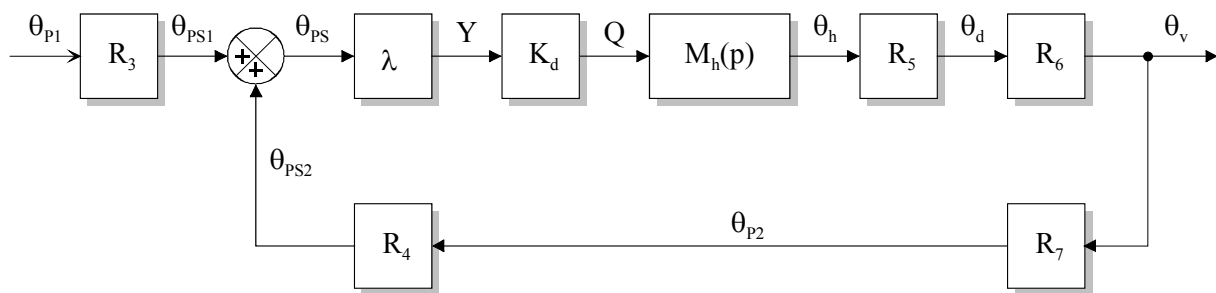


Figure 7 : Schéma bloc simplifié

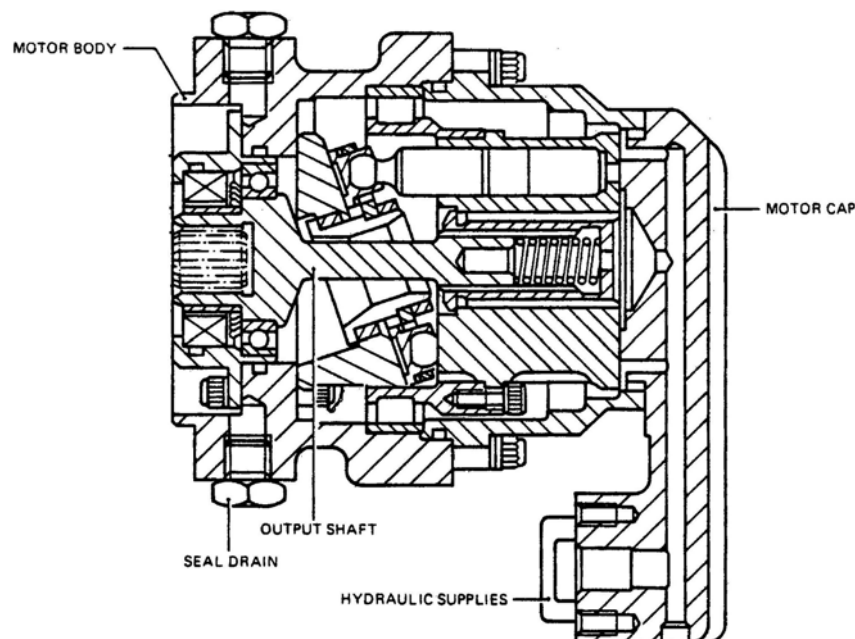


Figure 8 : Moteur hydraulique

Le déplacement  $y$  du tiroir est proportionnel à l'angle  $\theta_{PS}$  (en radian) du porte satellite :

$$y(t) = \lambda \cdot \theta_{PS}(t) \quad \text{avec } \lambda \text{ (m/rad)} > 0$$

Les distributeurs délivrent un débit  $q(t)$  (m<sup>3</sup>/s) proportionnel au déplacement  $y(t)$  des tiroirs :

$$q(t) = K_d \cdot y(t) \quad \text{avec } K_d = 0,1 \text{ (m}^3\text{/s)/m}$$

La fonction de transfert  $M_h(p)$  des moteurs hydrauliques est la suivante :

$$M_h(p) = \frac{\theta_h(p)}{Q(p)} = \frac{-K_h}{p \left( 1 + 2 \frac{\xi_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2} \right)}$$

avec :

$$K_h = \frac{1}{V_m} = 5,8 \cdot 10^5$$

$$\omega_h = \sqrt{\frac{2BV_m^2}{V_t J_h}} = 400 \text{ rad/s.}$$

expressions dans lesquelles :

- $B$  : module de compressibilité du fluide  $B = 10^4 \text{ bars} = 10^9 \text{ Pa}$
- $V_m$  : volume spécifique  $V_m = 1,72 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{rad}$
- $V_t$  : volume sous pression  $V_t = 52 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$
- $J_h$  : inertie équivalente sur l'arbre du moteur  $J_h = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Question 3-8** : Préciser l'unité de  $K_h$  et justifier que le gain du moteur hydraulique soit négatif.

Afin de se ramener à une représentation plus classique de la boucle d'asservissement, on considère positif le gain de toutes les transmittances :

- $R_i > 0 \quad \forall i,$
- $M_h(p) = \frac{K_h}{p \left( 1 + 2 \frac{\xi_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2} \right)}$  avec  $K_h > 0$

**Question 3-9** : Montrer que, dans ces conditions, le schéma bloc de la Figure 7 peut se mettre sous la forme de celui de la Figure 9, mathématiquement équivalente.

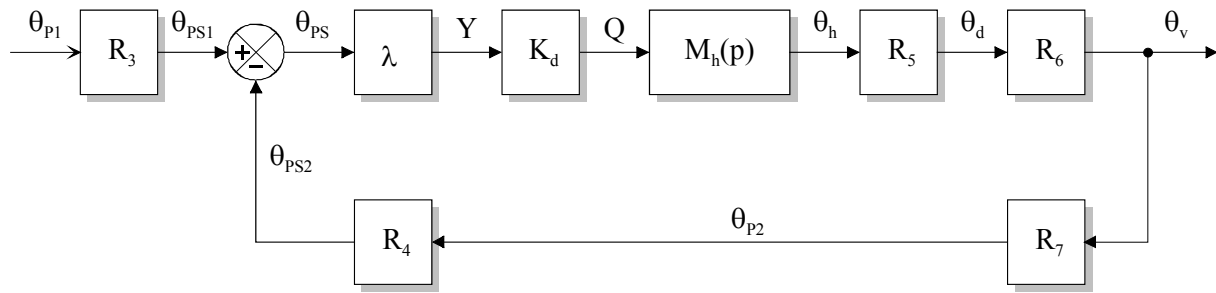


Figure 9 : Schéma bloc simplifié

**Question 3-10 :** Ce schéma bloc est à nouveau simplifié (voir Figure 10) afin de rendre unitaire la boucle de retour.

- Montrer alors que  $T_h(p)$  correspond à la fonction de transfert en boucle ouverte  $\frac{\theta_{PS2}}{\theta_{PS}}$ . En déduire l'expression de son gain de boucle  $K_{BO}$ .
- Déterminer  $G_3(p)$  et montrer que son gain correspond au gain  $K_{BF}$  de la fonction de transfert en boucle fermée  $F_h(p) = \frac{\theta_v}{\theta_{P1}}$ .

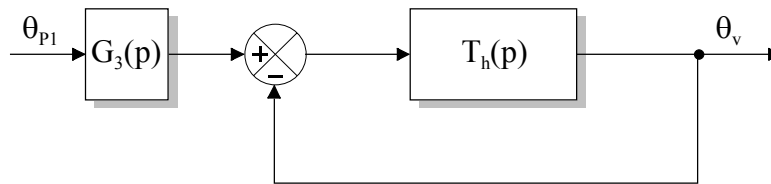


Figure 10 : Schéma bloc avec retour unitaire

On donne sur le document réponse DR1, la représentation de Bode (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) et de Black (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) de la fonction de transfert en boucle ouverte  $T_h(p)$ .

**Question 3-11 :** Pour chacune des questions suivantes, préciser quelle représentation utiliser et indiquer si nécessaire sur le document réponse DR1 comment graphiquement obtenir ces informations.

- Justifier la forme du tracé dans la représentation de Bode.
- Déterminer les marges de phase et de gain.
- Déterminer le gain  $K_{BO}$  de la fonction de transfert en boucle ouverte.
- Proposer une méthode graphique permettant de mesurer le coefficient de surtension et en déduire la valeur du coefficient d'amortissement réduit  $\xi_h$  du moteur hydraulique.
- Déterminer la bande passante à -6dB du système en boucle fermée.
- Déterminer le coefficient de surtension du système en boucle fermée.

Indépendamment des valeurs trouvées à la question précédente, on admet que le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte est  $K_{BO} = 7,1$  et que  $\xi_h = 0,2$ .

**Question 3-12** : Détermination de  $\lambda$

- En déduire la longueur du bras de levier  $\lambda$ .
- En déduire la valeur limite  $\lambda_L$  de  $\lambda$  au delà de laquelle le système serait instable.
- Pour quelle valeur de  $\lambda$  le système présenterait un coefficient de surtension de 2,3dB en boucle fermée et quelle serait alors la pulsation de résonance  $\omega_R$  ?

On souhaite déterminer la valeur limite  $\lambda_L$  de  $\lambda$  par application du critère de Routh. On pose :

$$T_h(p) = \frac{\lambda K}{p(1 + a_1 p + a_2 p^2)}$$

**Question 3-13** : Déterminer quelle condition doit satisfaire  $\lambda$  pour que le système soit stable. En déduire  $\lambda_L$ .

### Analyse des performances globales

**Question 3-14** : On admet que la longueur utile de la vis est  $l = 0,6$  m. Le pas de la vis est  $p_v = 10$  mm. Déterminer :

- le nombre de tours maxi  $N_v$  effectué par la vis,
- le nombre de tours maxi  $N_{P1}$  effectué par le planétaire couronne  $P_1$ ,
- le nombre de tours maxi  $N_m$  du moteur électrique.

Le capteur de position de gain  $K_2$  de la boucle d'asservissement du moteur électrique est un capteur potentiométrique 10 tours (voir annexe 6) dont la tension de sortie varie de -12 à +12 Volts.

**Question 3-15** : En déduire :

- le rapport de transmission du réducteur  $R_2$  (non représenté) dont l'arbre de sortie entraîne le potentiomètre,
- le gain  $K_2$  du capteur potentiométrique,
- le gain  $K_1$  du régulateur.

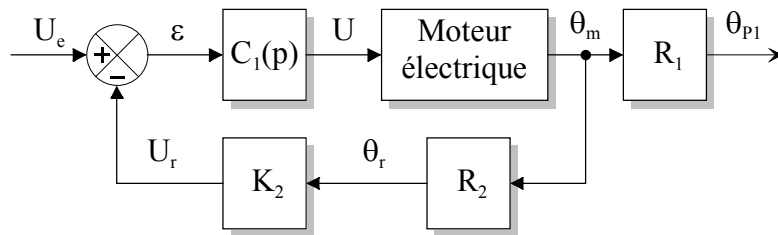
Dans le cas d'une entrée de type rampe  $u_e(t) = t.u(t)$ , le cahier des charges stipule que l'écart de traînage ne doit pas excéder la valeur  $\varepsilon_T \leq 0,02$  V.

**Question 3-16 :** En déduire la valeur de  $K_1$  permettant de satisfaire cette condition.  
*Conclure.*

Afin de pouvoir satisfaire l'ensemble des spécifications du cahier des charges, on met en place un correcteur à retard de phase de fonction de transfert :

$$C_1(p) = K_1 \frac{1 + T_1 p}{1 + b T_1 p} \quad \text{avec } b > 1.$$

Le schéma bloc devient le suivant :



Afin de limiter l'influence du correcteur au niveau de la pulsation  $\omega_c$  telle que  $A_{dB}(\omega_c) = 0$ ,

on pose  $\frac{1}{T_1} = \frac{\omega_c}{10}$ .

**Question 3-17 :** Calcul du correcteur

- Représenter sommairement sur la copie la réponse en fréquence dans Bode de ce correcteur en faisant apparaître les points caractéristiques.
- Déterminer  $K_1$ ,  $T_1$  et  $b$ .

**Fin de l'énoncé.**