Les calculatrices sont autorisées

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Soit α un nombre réel et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note (E_α) l'équation différentielle suivante :

$$(E_\alpha) : \ y'' + \alpha y = f.$$

On désigne par :

- $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions F de la variable x deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E_α).
- $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des fonctions F éléments de $\mathcal{S}$ telles que $F(0) = F(\pi) = 0$.

Partie A

A.1.) On suppose dans cette question que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$ et que le réel α est nul. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_0$.

A.2.) On suppose dans cette question que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$.
Soit ω un réel strictement positif, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_0$ lorsque :

- A.2.a.) $\alpha = \omega^2$.
- A.2.b.) $\alpha = -\omega^2$.

A.3.) On suppose dans cette question que le réel α est nul.
Soit n un entier naturel non nul, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_0$ lorsque :

- A.3.a.) $f(x) = \cos nx$.
- A.3.b.) $f(x) = \sin nx$.

A.4.) On suppose toujours que le réel α est nul et on désigne par f un élément quelconque de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- A.4.a) Montrer que :

$$S = \left\{ F : x \mapsto \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u + ax + b \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- A.4.b) En déduire que l'ensemble S_0 admet un unique élément noté F_1. Déterminer F_1.

Dans toute la suite de cette partie, on désigne par φ la fonction définie de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans lui-même qui, à la fonction f, associe F_1, unique élément de S_0.

A.5.a.) Montrer que l'application φ est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

A.5.b.) L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ?

A.5.c.) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme φ.

Partie B

B.1.) On définit la fonction p de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad p(x) = \left| \sin\left(\frac{x}{2} \right) \right|.$$

B.1.a.) Montrer que la fonction p est paire, de période 2π, continue et de classe C^1 par morceaux.

B.1.b.) Représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction p sur $[-\pi, 3\pi]$ dans un repère orthogonal $(O\,;\, \vec{i}, \vec{j})$.
Unité graphique 2 cm sur $(O\,;\, \vec{i})$ et 5 cm sur $(O\,;\, \vec{j})$.

B.1.c.) Justifier avec soin que la fonction p est somme de sa série de Fourier.

B.1.d.) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction p et montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad p(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{4n^2 - 1}.$$

B.2.a.) Soit g une fonction continue, de période 2π de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note $a_n(g)$ et $b_n(g)$ ses coefficients de Fourier.
Donner la formule de Parseval pour la fonction g.

B.2.b.) En déduire que :

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Partie C

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E_1) dans le cas particulier où f est un élément de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit :

$$y'' + y = f.$$

C.1.) Déterminer l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0.$$

C.2.) On définit la fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

C.2.a.) Montrer que :

$$\forall\, x \in [0, \pi]\,, \qquad h(x) = \sin x \int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t - \cos x \int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t\,.$$

C.2.b.) Montrer que la fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter h' et h''.

C.2.c.) En déduire que la fonction h est une solution particulière de (E_1).

C.3.) Déterminer l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E_1).

C.4.) On suppose dans cette question que $f(x) = |\sin x|$.

C.4.a.) Déduire de la partie B que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\,.$$

C.4.b.) Soit x un nombre réel et n un entier naturel, calculer :

$$\int_0^x \cos 2nt \,\sin(x-t)\,\mathrm{d}t\,.$$

C.4.c.) **On admet avoir le droit de permuter série et intégrale**.

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{\pi}(1-\cos x) + \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos 2nx - \cos x}{(4n^2-1)^2}\,.$$

C.4.d.) Déduire de la question B.2.b.) que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}\cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)^2}.$$

C.4.e.) Calculer $h(0)$ et $h(\pi)$.

C.4.f.) Déduire l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = |\sin x|$ puis l'ensemble S_0 des éléments de S s'annulant en 0 et π.

Partie D

On considère l'équation différentielle :

$$(F)\quad x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0,\quad x > 0.$$

D.1.) Soit z une application deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = z(\ln x)$. Exprimer à l'aide des applications z', z'' les dérivées première et seconde de l'application y.

D.2.) Montrer que l'application y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (F) si, et seulement si, l'application z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à préciser, que l'on notera (H).

D.3) Résoudre (H). En déduire l'ensemble des solutions de (F).

D.4.) Déterminer l'unique solution du système suivant :

$$\begin{cases} x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0,\ x > 0, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Fin de l'énoncé