ÉPREUVE SPÉCIFIQUE FILIÈRE TSI – SESSION 2003

MATHÉMATIQUES 1
Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les cinq parties du problème sont indépendantes

α désignant un réel non nul, on note f_α la fonction définie sur R par $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$.

PARTIE I

1. Montrer qu'on peut se limiter à $\alpha > 0$ (ce qu'on fera dans toute la suite du problème).

2. Vérifier que f_α est périodique ; on notera T_α une période strictement positive.

3. De quelle équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients réels constants, homogène, f_α est-elle solution ? Résoudre cette équation différentielle.

4. On note respectivement E et d la partie entière et la partie décimale de α.
   C'est-à-dire $\alpha = E + d$, avec E entier naturel et $0 \leq d < 1$.
   Déterminer en fonction de E et d le nombre de solutions dans $[0,\pi]$ de $f_\alpha(x) = 0$.

PARTIE II

On pose $f_{\alpha,\beta} = f_\alpha + f_\beta$, où α et β sont des réels strictement positifs distincts.

1. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est périodique si et seulement si il existe deux entiers naturels non nuls k et p tels que : $k\alpha = p\beta$ (on pourra envisager $x = 0$). On notera $T_{\alpha,\beta}$ une période de $f_{\alpha,\beta}$.

2. Relier alors $T_{\alpha,\beta}$ à T_α et T_β.
3. α et β étant à nouveau quelconques (mais toujours réels strictement positifs distincts), montrer la relation : $f''_{\alpha,\beta} + \alpha^2 f_{\alpha,\beta} = (\alpha^2 - \beta^2) f_\beta$.

4. En déduire que $f_{\alpha,\beta}$ est solution de l'équation (E) : $y^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2)y'' + \alpha^2\beta^2 y = 0$.

5. Vérifier que f_α est solution de (E). En déduire que f_β, f'_α, f'_β sont également solutions de (E).

6. En admettant que l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 4, montrer que la famille (f_α , f_β , f'_α , f'_β) en constitue une base.

PARTIE III

On s'intéresse à $f_{\frac{1}{2},1}$, que pour simplifier on note f.

1. Montrer que $[0,2\pi]$ est un intervalle suffisant à l'étude de f.

2. Etudier les variations de f sur $[0,2\pi]$; (on notera x_0 le point de $]0,2\pi[$ où $f'(x) = 0$).

3. Déterminer $f(x_0)$.

4. Discuter suivant c le nombre de solutions dans $[0,2\pi]$ de l'équation $f(x) = c$.

5. Préciser les solutions dans les cas $c = -1$ et $c = 0$.

6. On se place dans le cas où l'équation $f(x) = c$ admet, sur $[0,2\pi]$, 2 solutions distinctes x_1 et x_2. Déterminer $\cos\left(\frac{x_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{x_2}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{x_1}{2}\right).\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)$.

7. Résoudre $8y''(x) + 5y(x) = 3\,[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x)]$, avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

8. Reprendre la question III.7 en appliquant le résultat de la question II.3 à des valeurs particulières de α et β.

PARTIE IV

On pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} f_{\frac{1}{2^k}}(x)$, et $U_n(x) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right).P_n(x)$.

1. Montrer que $U_1 = \frac{1}{2}\,U_0$.

2. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

3. En déduire, pour $x \in]0,\pi]$ la limite de $P_n(x)$ quand n tend vers l'infini.

4. Vérifier que le résultat précédent peut se prolonger par continuité à $x = 0$.

PARTIE V

On note F_α la fonction de période 2π, telle que $F_\alpha(x) = f_\alpha(x)$ sur $[-\pi, +\pi]$.

1. Comparer F_k et f_k si $k \in \mathbb{N}^*$.
   Dans toute la suite, on suppose que α n'est pas entier.

2. Représenter sommairement $F_{\frac{1}{3}}$ et $F_{\frac{4}{3}}$ pour $x \in [0, 2\pi]$.

3. Montrer que F_α est continue sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable aux points d'abscisses $(2p+1)\pi$.

4. On note à nouveau E et d les parties entière et décimale de α.
   Discuter suivant E et d les signes de $F_\alpha(\pi)$ et de $\left(F_\alpha\right)'_g(\pi)$, dérivée à gauche de F_α en π.

5. Déterminer les coefficients de Fourier de F_α (qu'on notera pour simplifier $a_n(\alpha)$ et $b_n(\alpha)$).
   Ecrire la série de Fourier de F_α et préciser sa convergence.

6. Quelle est la limite de $a_n(\alpha)$ quand α tend vers un entier naturel non nul k ?

7. Déduire du résultat obtenu en 5 un développement en série de $\cot(\alpha\,\pi)$.

Fin de l'énoncé