1/ REMARQUES GENERALES :

Le problème posé portait sur l'étude de systèmes différentiels linéaires. Il ne posait pas de difficulté qui soit insurmontable pour des élèves de classes préparatoires. Cependant, malgré cela, la moyenne générale est particulièrement basse.

Les correcteurs tiennent à signaler le niveau extrêmement faible de nombreux candidats.

De nombreuses copies sont rédigées avec beaucoup de désinvolture : les phrases de justification et les liens logiques naturels sont remplacés par des sigles ou des signes cabalistiques (flèches, lettres cerclées…). Tout cela n'est pas admissible : un candidat se doit de rédiger des phrases explicites sans sous-entendu. Ces dérives commodes cachent, au mieux, une absence de raisonnement sérieux. Que dire d'un candidat qui rédige ainsi un raisonnement par récurrence : « supposons que, pour tout entier n, la propriété soit vraie » ?

Nous rappelons que la rédaction est prise en compte dans l'évaluation des copies.

Dans un très grand nombre de copies, on ne trouve même pas trace de l'utilisation des quantificateurs. Cela s'avère rédhibitoire lorsqu'on aborde une démonstration subtile. Ainsi, le mot « avec » semble être devenu un « joker » commode.

Règne plus généralement une confusion bien étrange entre les différents « objets » utilisés : équation différentielle, solutions, ensemble de ses solutions…

On peut toutefois découvrir des copies bien rédigées de candidats qui sont parvenus à mener la résolution du problème jusqu'à son terme. Elles prouvent que celui-ci n'était vraiment pas de difficulté insurmontable et que le temps imparti permettait, à un candidat qui en avait la volonté, d'aller assez loin dans la résolution sans sacrifier la rigueur ou la qualité de la rédaction.

Les candidats ont pour l'essentiel abordé la partie I sans la terminer, ont traité la partie II avec plus ou moins de réussite et ont ensuite traité la première moitié de la partie III. Toutes les questions au-delà de **III.2.1** ont été très peu abordées.

Avant de rentrer plus dans le détail des questions, nous apportons quelques réflexions générales :

un point positif à signaler : la qualité de la présentation des copies semble s'améliorer. Il y a moins de copies vraiment illisibles, les résultats sont plus espacés et plus systématiquement encadrés.

Nous rappelons que la présentation est prise en compte dans la notation. L'emploi abusif du blanc correcteur n'est pas conseillé : il n'est pas facile de lire une réponse qui a été écrite par-dessus du blanc correcteur lorsque le quadrillage de la page et les restes de ce qui a été recouvert se mélangent à la réponse.

De manière générale, les correcteurs ont apprécié les copies bien présentées, où les résultats apparaissent clairement en fin d'une justification bien construite, complète, avec les hypothèses des théorèmes utilisés rappelées et vérifiées.

Comme d'habitude, le niveau faible de certains candidats transparaît souvent dans les questions qu'ils choisissent de traiter. Les questions simples comme **II.3.1 et 11.3.4** ont ainsi eu leurs faveurs.

De trop nombreux candidats semblent très mal à l'aise avec la manipulation de grandeurs vectorielles et des systèmes différentiels en particuliers, auxquels ils ne semblent pas habitués.

On voit ainsi des candidats trouver dans la partie I des bases de solutions scalaires !

On voit aussi de trop nombreuses inégalités qui n'ont aucun sens, portant par exemple sur des nombres complexes ou des matrices.

De nombreux candidats semblent user d'abréviations et d'abus de langage qui sont implicites dans le cadre des devoirs faits en cours d'année, mais qui nécessitent un décryptage. Ainsi, on nous parle parfois sans la moindre explication de "VP", "SEP", "CPM", ce que le correcteur ne comprend pas toujours et peut justifier la note 0 à la question.

Dans le même registre, beaucoup de candidats se livrent à une certaine facilité en invoquant les « théorèmes généraux » pour justifier telle ou telle propriété, sans trop qu'on sache ce qu'il y a dans ces fameux théorèmes. Ceci peut paraître licite quand il s'agit de prouver la continuité d'une fonction telle que $t \to \exp(-t^2)$, beaucoup moins au moment de répondre à des questions plus complexes.

Il est assez étonnant de voir utiliser les théorèmes de comparaison pour les séries numériques ou les intégrales généralisées sans se préoccuper du signe des suites ou des fonctions manipulées. Ce genre d'erreur beaucoup trop fréquente a été lourdement sanctionné.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Partie I

Cette partie est la moins réussie de toutes. De nombreux candidats sont passés directement à la partie II après avoir échoué en **I.3**. C'est là que la non-maîtrise de la notion de système différentiel se faisait clairement sentir.

I.1 a fait d'emblée l'objet d'un malentendu. De très nombreux candidats ont pensé répondre correctement à la question en affirmant que le système avait une solution unique une fois qu'une condition initiale était donnée. Attention, le sujet précisait bien qu'on demandait des informations sur la structure de l'ensemble des solutions. Il faut prendre le temps de bien lire un énoncé. Ensuite, pour ceux qui ne se sont pas fourvoyés dans cette direction, et au-delà de ceux qui fournissent la bonne réponse, pour certains l'espace des solutions est soit de dimension 1 soit de dimension 2. Ou bien encore, c'est un espace affine. Pour cette question, on peut lire un peu n'importe quoi avec des mélanges de notions de réel, de vecteur, d'ensembles, de matrices : c'est assez inquiétant.

I.2 est mieux traitée. Bien entendu, beaucoup oublient de préciser que V est non nul avant d'aboutir à l'équation scalaire. Ensuite, ceux qui ont obtenu cette équation savent en général exprimer la forme des solutions. Par contre, pour certains la solution est de la forme Cexp(-Lambda(t)t) comme si Lambda(t) était une constante. D'autres introduisent un signe moins (Cexp(-∫Lambda(t)dt)). Mais surtout, il en reste encore trop qui n'ont pas compris la nature des objets qu'ils manipulent. Ainsi, certains après avoir « simplifié » par V, aboutissent à l'équation « scalaire » Alpha'(t)=A(t)Alpha(t), et se retrouvent avec A(t) dans l'expression des solutions (Cexp(-∫A(t)dt) !), ou encore y laissent le vecteur V.

Avec **I.3** les vraies difficultés ont commencé. Cela peut paraître paradoxal alors que cette partie était destinée à fournir des exemples illustratifs élémentaires. Pour commencer, il faut reconnaître qu'une majorité de candidats a quand même fait le lien avec la question précédente et est partie dans la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A(t). Ceux qui y sont arrivés oublient souvent de vérifier que les deux valeurs propres sont distinctes (avec a-1-b) et que le vecteur propre correspondant à la valeur propre a-b est non nul. Mais surtout, parmi ceux qui arrivent là, il en est un nombre impressionnant qui n'arrive pas à expliciter correctement une base de solutions. Certains donnent directement les deux vecteurs propres comme solutions (constantes ?) ; d'autres trouvent des solutions scalaires (genre $t \to k_1 \exp(t)$ et $t \to k_2 \exp((a-b)t)$), preuve qu'ils n'ont pas compris la nature du système différentiel. Avant cela, tout se passe comme si certains candidats n'avaient jamais entendu parler de réduction d'endomorphisme. Ainsi, essayant d'appliquer **I.2**, ils injectent A(t)V=Lambda(t)V dans le système et se perdent dans des calculs inextricables. Bien entendu, parmi les autres, tous ne voient pas la valeur propre 1 évidente et se lancent dans le calcul du polynôme caractéristique, souvent en n'arrivant pas à en expliciter les racines.

I.4.1 est de même nature, à ceci près que les deux valeurs propres se retrouvent plus facilement dans les copies. A noter les difficultés de certains pour manipuler les primitives de a(t) et de b(t).

I.4.2 a aussi été l'objet d'un grand malentendu. De très nombreux candidats ont cru qu'il ne s'agissait là que d'affirmer une existence et se bornent pour cela à rappeler que dans le corps de complexes le polynôme caractéristique est nécessairement scindé, d'où le résultat. Ce n'est bien évidemment pas ce qui était demandé. Certains d'ailleurs, qui n'avaient pas fait ici l'effort de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres, ont ensuite été amenés à le faire dans **I.4.4**. Par contre, personne n'a fait remarquer que les vecteurs propres V_1 et V_2 obtenus étaient indépendants de t. Ce n'était pas évident au départ, la matrice A(t) dépendant, elle, explicitement de t. Cette simple remarque, essentielle pour appliquer **I.2**, justifiait le calcul complet des valeurs propres et des vecteurs propres.

I.4.3 a été mieux traitée, aux erreurs de calcul près (nombreuses). Ceci dit, on ne fait pas toujours bien remarquer que b(t) est non nul afin de conclure correctement.

I.4.4 a été peu traitée. Les mêmes remarques que pour **I.3** et **I.4.1** s'appliquent. Certains, qui n'ont pas calculé explicitement les valeurs propres et les vecteurs propres, se contentent de donner les solutions sous la forme exp(-∫Lambda$_1$(t)dt)V_1 et exp(-∫Lambda$_2$(t)dt)V_2. Enfin, pratiquement personne ne songe à vérifier que les deux solutions obtenues sont linéairement indépendantes.

Partie II

La partie II a été de manière générale mieux traitée que la partie I. De nombreux candidats ont sauté en **II.1** après avoir buté sur **I.3**.

II.1 est assez moyennement traitée. Déjà, les propriétés définissant une norme sont mal connues, ce qui est inquiétant. Il en manque souvent au moins une, ou alors on en rajoute d'autres (en nombre non négligeable) du style N(A+B) = N(A)+N(B) (égalité, oui…). De même, on voit souvent N(A) ≤ N(A), sans module pour, ce qui n'a bien entendu aucun sens. Ensuite, les preuves concernant le caractère défini de la norme et l'inégalité triangulaire sont assez approximatives. Souvent avec ||AX||=0, on se contente de dire que X est non nul pour "simplifier" par X. Ensuite, le passage en deux temps aux bornes supérieures dans l'inégalité triangulaire est la plupart du temps escamoté.

II.1.2 est peut-être la question la plus mal traitée de tout le sujet. Déjà, de très nombreux candidats ont cru voir ici une inégalité de Cauchy-Schwarz liée à on ne sait quel produit scalaire. Ensuite, ça a été le catalogue de toutes les horreurs. La plupart du temps, on affirme sans plus d'explication que ||ABX||≤||AX||.||BX||, ce qui est bien entendu faux (imaginons prendre X de telle sorte que BX∈ kerA). Autrement, on voit des inepties du genre ||AXBX||, etc…. Bref, encore une fois, il faudrait se souvenir de la nature des objets manipulés.

II.2.1 est une question plus facile sur laquelle les candidats ont tenté de se rattraper. Encore fallait-il le faire correctement. La récurrence a en général été bien vue, mais la preuve correcte via la récurrence que X était de classe C^{∞} est souvent très maladroite. Pire, certains utilisent directement le fait que la solution s'exprime à l'aide de l'exponentielle matricielle exp(At) pour affirmer qu'elle est indéfiniment dérivable.

L'application de la formule de Taylor avec reste intégral a en général été vue correctement dans **II.2.2**, avec des noms parfois fantaisistes (Taylor-Young, Taylor-Young-Intégrale, etc…). Certains redémontrent directement le résultat à l'aide d'intégrations par partie et d'une récurrence.

II.2.3 est en revanche une vraie catastrophe. Pour certains le résultat est évident, le reste tend vers 0 sans autre forme de procès. La seule chose que les candidats ont à peu près perçu est l'utilisation de x^{p}/p!. Autrement les majorations sont très hasardeuses. On voit des inégalités faisant intervenir la matrice A sans norme. De manière générale, les normes et valeurs absolues sont les grandes absentes de cette question. Pratiquement personne n'a fait le lien avec la question **II.1.2** pour majorer N(A^{p+1}).

II.3.1 a été bien sûr l'occasion pour certains candidats d'engranger quelques points. Pour certains malheureusement, ce sont quasiment les seuls du problème. Le polynôme caractéristique est le plus souvent correctement calculé.

Dans **II.3.2**, le fait que la famille de vecteurs proposée soit une base est en général assez bien vu. La suite de la question est beaucoup plus hasardeuse. Certains essaient de poser la division et passent à la suite face à l'échec. Autrement, ceux qui tentent quelque chose le font systématiquement par identification de coefficients. Encore faut-il le faire dans une bonne base. Ainsi, certains essaient de déterminer le reste d'abord dans la base canonique de IC$_3$[X] avant de repasser dans la base donnée. Bref, aux erreurs de calcul près, un petit nombre quand même raisonnable de candidats arrivent à déterminer le reste.

Pour pouvoir traiter **II.3.3**, il fallait avoir au moins abordé **II.3.2**. Lorsque c'était le cas, l'application du théorème de Cayley-Hamilton (pas toujours mentionné explicitement) a en général été bien vue.

II.3.4 a permis à de nombreux candidats de se rattraper un peu. Encore fallait-il ne pas faire d'erreurs de calcul.

Dans **II.3.5**, le bon rayon de convergence est en général trouvé, par application de la règle de d'Alembert, ou alors en décomposant en deux exponentielles. A noter quand même certains candidats qui trouvent un rayon de convergence nul et qui ensuite explicitent l'expression de la somme ! Pour la somme elle-même, les résultats sont plus mitigés. Il y a souvent des erreurs de calcul.

II.3.6 est peu abordée et son esprit n'est pas toujours bien compris. Assez peu de candidats ont saisi qu'on allait appliquer ici ce qui avait été fait dans les questions précédentes. Ensuite, ceux qui l'ont compris ne pouvaient trouver le bon résultat que s'ils avaient la bonne expression de A^{k} et la bonne valeur de la somme de **II.3.5**. Et même lorsque c'est le cas, ils font ensuite de nombreuses erreurs de calcul. D'autres en revanche tentent de résoudre le système différentiel directement par substitution et avec des méthodes de variation de constantes, sans faire le moindre lien avec les questions précédentes. Ils y arrivent avec plus ou moins de succès.

Partie III

Avec **III.1.1**, on aurait pu s'attendre à ce que tous les candidats répondent correctement. Tel ne fut pas le cas. Globalement, la majorité des candidats a répondu à la question, en majorant à l'infini $\exp(-t^2)$ par $1/t^2$ ou $\exp(-t)$. Ceci dit, beaucoup oublient de préciser que la fonction est positive et continue donc localement intégrable. Ces oublis ont été sanctionnés. Pire, on trouve des majorations par $\int_0^{\infty} dt/t^2$ considérée comme convergente. Enfin, pour un nombre anormalement élevé de candidats, le fait que $\lim_{t\to+\infty}\exp(-t^2) = 0$ est suffisant pour affirmer que l'intégrale converge. Ceci n'est pas acceptable.

Dans **III.1.2**, une majorité de candidats a bien vu qu'il était question d'appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, mais l'application est souvent maladroite. Déjà, un nombre significatif d'entre eux (pas tous, heureusement) veulent l'appliquer de manière complètement erronée à $F(x)$. Ensuite, dans $G(x)$, la domination de l'intégrand $g(x,t)$ par une fonction indépendante de x n'est pas toujours bien faite. En fait tous ne voient pas qu'on intègre sur un segment et qu'une majoration par une constante suffit. Certains font quand même remarquer que $x\to g(x,t)$ étant C^1, le résultat en découlait. Mais d'autres s'obstinent à vouloir intégrer sur IR tout entier. Ensuite, des erreurs de calcul dans l'expression de $F'(x)$ et $G'(x)$. Certains de toute évidence ne savent pas dériver sans se tromper. Pour un nombre non négligeable de candidats, la dérivée de $x\to\int_0^{x} f(x)dx$ est $f(x)-f(0)$.

Dans **III.1.3** la démonstration de $F'(x)+G'(x)=0$ est souvent omise. Par contre, une fois ceci admis, les candidats arrivent globalement à trouver la valeur de F+G en appliquant en 0. Ceux qui arrivent à traiter la question en faisant un bon changement de variable omettent toutefois dans l'immense majorité des cas de vérifier que l'égalité reste valable en x=0.

Avec **III.1.4**, le gros du travail revenait à montrer que $\lim_{x\to+\infty}G(x)=0$. Parmi les candidats qui ont traité cette question (assez peu, au bout du compte), très peu ont effectué une majoration directe en sortant le terme $\exp(-x^2)$, ce qui pourtant était le plus simple. A l'inverse, un grand nombre s'est contenté de dire que $g(x,t)$ convergeait simplement vers zéro pour $x\to+\infty$ pour affirmer qu'il en était de même pour l'intégrale $G(x)$. A croire qu'ils n'ont même pas vu qu'il y avait une interversion limite-intégrale. Les autres ont tenté d'appliquer le théorème de la convergence dominée avec plus ou moins de succès. Encore une fois, on intégrait ici une fonction continue sur un segment.

Beaucoup de candidats ont abordé la question **III.1.5** sans avoir traité les questions précédentes. Le résultat de **III.1.4** donné dans l'énoncé y aidait beaucoup. Cependant, très peu pensent à préciser que l'intégrande étant positif, on devait choisir la racine carrée positive.

Parmi les candidats qui ont abordé **III.2.1** (le plus souvent ce devait être à la fin, la rédaction s'en ressent), une fraction non négligeable a dû lire la question en diagonale et s'est focalisée sur le caractère C^1 de $u(t)$ et de $v(t)$ sans chercher à voir si ces expressions étaient bien définies. Ceux qui l'ont fait s'en sont généralement bien sortis, à ceci près qu'ils traitent $u(t)$ en disant après que c'est la même chose pour $v(t)$, alors que l'intégrande de $v(t)$ était prolongeable par continuité en 0. Ensuite, pour le caractère C^1, c'est un peu plus approximatif. La majoration de la dérivée par rapport à t ne sort pas toujours. A noter que certains cherchent à majorer la dérivée par rapport à x. Est-ce une méconnaissance des théorèmes ou un mélange dans les variables (leur rôle était inversé par rapport à **III.1.2**) ?

La suite des questions a été très peu abordée. Nous n'avons que très rarement vu la bonne équation différentielle pour $w(t)$ et lorsque c'était le cas, jamais le bon système différentiel. A croire que certains candidats ne savent pas déterminer la partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe. Autrement, trop souvent, on voit une équation erronée de type $w'(t)=iw(t)$.

Les questions suivantes ne sont quasiment jamais traitées, à ceci près que certains ont essayé de gagner quelques points en calculant $u(0)$ et $v(0)$ dans **III.2.5**.