RAPPORT SUR L'EPREUVE ECRITE 2014 DE MATHEMATIQUES 2 DE LA FILIERE PC

1/ CONSIGNES GENERALES :

Présentation du sujet :

Le sujet proposait l'étude d'opérateurs sur l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques et permettait d'aborder différents aspects du programme d'analyse : séries de Fourier, séries de fonctions, équations différentielles, intégrales dépendant d'un paramètre. Il était composé de 3 parties indépendantes ; dans la dernière, le produit de convolution est introduit pour généraliser les deux exemples des premières parties. Le sujet était de difficulté progressive et faisait appel aux résultats du cours. Ceux-ci sont en général connus, même si leur utilisation est parfois approximative. On peut noter une bonne présentation de la quasi-totalité des copies et un effort de rédaction des candidats. La citation des résultats du cours et la vérification précise des hypothèses permettent de révéler les différentes qualités des candidats et mesurent leur compréhension ou au contraire leur incapacité à manipuler les dites notions. Signalons aux futurs candidats que la rigueur est la clé de la réussite et que l'on attend d'eux des réponses argumentées ; des points sont prévus pour ces vérifications ou des pénalités pour les imprécisions caractérisées. La rédaction reste un axe de progrès pour les candidats, notamment pour bien citer les théorèmes utilisés. De manière générale, les correcteurs ont apprécié les copies bien présentées, où les résultats encadrés apparaissent clairement, la rédaction précise et les justifications bien construites. Le candidat doit être conscient qu'il lui appartient de mettre en évidence les résultats qu'il obtient et de rédiger suffisamment pour permettre au correcteur de suivre son raisonnement, de justifier chaque fois que nécessaire et de citer clairement les théorèmes utilisés.

Problèmes constatés par les correcteurs :

Les résultats de cours classiques ne sont pas toujours connus des candidats. Au sujet des calculs dont les résultats étaient donnés dans le texte, les correcteurs constatent fréquemment un passage en force, c'est-à-dire un manque de développement. Globalement, on peut constater que les résultats spécifiques aux séries de Fourier posent de nombreux problèmes aux candidats, les calculs de coefficient de Fourier démontrent un manque de pratique de leur part.

Autres remarques : difficultés liées à la valeur absolue ; disparition dans les intégrales sans justification de signe ; confusions entre primitives et intégrales ; problème général dans les majorations ou le caractère C^1 des fonctions ; quelques affirmations abusives sans justification ni vérification : « g est 2π périodique car f l'est », « g est continue car f l'est » (sans voir que g est définie par une intégrale), « g est de classe C^2 comme produit de fonctions C^2» (avant d'avoir calculé g'), « La série $\Sigma g'_n$ converge normalement » (sans le démontrer) ; oubli de modifier les bornes dans un changement de variables.

On constate aussi une mauvaise lecture des questions, peu de justification de la convergence des séries, tentative de justification de la linéarité dans **II.3**, mauvaise connaissance du mot endomorphisme (la linéarité est souvent oubliée), peu d'interprétation correcte dans **III.3.c** et **III.3.d**, tentative de masquer les erreurs de calculs (**II.1.b**), confusion entre convergence absolue et convergence normale, convergence normale ou théorème de domination sans les valeurs absolues. La rigueur et la maîtrise des séries de fonctions restent en deçà de ce que l'on pourrait attendre de futurs ingénieurs.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Partie I :

1.a Bien traitée dans l'ensemble, quelques erreurs pour la tangente en 0, mais l'allure de la courbe est correcte pour la majorité des candidats.

1.b Peu de vraies justifications confirmant la rare compréhension réelle de la classe C^1 par morceaux. Parfois on ne voit pas la non dérivabilité en 0 et l'annonce que f est de classe C^1, puisque, selon eux, la valeur absolue l'est.

2. Assez peu de réussite dans le calcul des coefficients de Fourier, même lorsque la définition initiale est correcte. Certains cherchent à utiliser la parité de f, d'autres passent, avec plus de succès, par le calcul de a_n et b_n, mais on s'embrouille trop souvent dans l'utilisation des parties imaginaires et de la parité. Une majorité de candidats n'a pas utilisé le théorème de convergence normale ou ne sait pas clairement se référer au bon résultat du cours. La convergence des séries est en général correctement faite si on n'oublie pas d'en parler, mais parfois, pour la première somme, on donne comme équivalent $1/n^2$ voire $o(1/n^2)$. Certains rattrapent néanmoins bien leur absence de calcul des coefficients de Fourier par un calcul par télescopage additif juste pour la première somme (qui manque parfois de rigueur). Finalement, peu de candidats trouvent la valeur des sommes des séries, y compris parmi ceux qui avaient la méthode correcte pour y parvenir et les valeurs exactes des c_n.

3. Trop de phraséologie tournant en rond, sans rien justifier, voire en concluant que H(s) vaut toujours zéro. Beaucoup pensent que la primitive d'une fonction périodique l'est toujours. Si la plupart pensent à dériver et concluent bien, d'autres veulent utiliser un changement de variable mais ne savent alors que rarement finir l'explication.

4. et 5. Le problème de la valeur absolue au 4 b) et 5 a) a déjà été évoqué ; celui de la justification du caractère C^2 de g aussi. La formule de trigonométrie utilisée au 5a) est connue ; le calcul des dérivées de g est, lui, parfois hasardeux mais, le résultat étant donné, la plupart obtiennent la relation demandée. Beaucoup trouvent la relation entre $c_n(f)$ et $c_n(g)$.

4.a La majorité des candidats connaît le théorème de continuité des intégrales à paramètres et ses hypothèses. L'hypothèse de domination est parfois oubliée ou on oublie les valeurs absolues dans la domination (avec f au lieu de $|f|$).

4.c Linéarité parfois oubliée.

5.a Peu de candidats ont justifié correctement le changement de bornes et la possibilité d'enlever la valeur absolue. Une large majorité de candidats a heureusement réussi à utiliser la formule de trigonométrie.

5.b N'est bien traitée que par très peu de candidats, beaucoup tombant dans le piège en pensant que les fonctions F et G sont constantes d'après **I.3.** De nombreux autres candidats dérivent g deux fois en utilisant la dérivée de f qui n'est supposée que continue. On tente souvent le passage en force, avec beaucoup d'erreurs dans les dérivées de F et G. Le caractère C^2 est en général mal démontré : il fallait d'abord calculer la dérivée puis constater sa classe C^1. Enfin, les calculs ont souvent été fastidieux et mal présentés avec quelques tentatives malhonnêtes pour arriver au résultat qui était donné.

Certains candidats veulent dériver $\varphi(f)$ sous la forme d'une composée $\varphi \circ f$ ou grâce à une formule hasardeuse de dérivation inappropriée. La relation $c_n(g') = in\, c_n(g)$ est en général connue mais ceux qui ne la connaissent pas n'ont généralement pas réussi à la retrouver.

6. Cette question a souvent posé des problèmes et a conduit à peu de réponses correctes.

6.a On ne pense pas toujours à faire une intégration par parties, on confond souvent $\varphi(h')$ et $[\varphi(h)]'$.

6.b Généralement correcte malgré des confusions entre h et f.

6.c Question peu abordée. Trop souvent, la dimension finie est invoquée. Beaucoup de bêtises dans la recherche du noyau car on affirme souvent que si l'intégrale d'une fonction est nulle, alors la fonction est automatiquement nulle.

7.a Bien traitée par ceux qui l'abordent, mais il manque souvent la réciproque ou la constatation de la 2π-périodicité des solutions. De même en **b)**, au mieux, on résout l'équation différentielle mais on étudie quasiment jamais la 2π-périodicité. On est souvent capable d'exhiber l'équation différentielle, mais certains ne savent pas la résoudre correctement. La réciproque a généralement été oubliée.

Partie II

1.a La convergence normale est en général correctement justifiée à condition de ne pas oublier la valeur absolue, la grande majorité connaît la notion.
1.b. Pour le calcul de la somme, la plupart reconnaissent une série géométrique mais certains oublient que $n\geq 1$ ce qui conduit à une formule fausse. On constate alors différentes stratégies allant d'une rectification illicite ou de l'annonce d'une erreur d'énoncé.

2. Problème pour justifier la convergence normale de la série $\Sigma g'_n$ que certains interprètent d'ailleurs comme la série de Fourier de g. Très peu abordent **2d**.
La question **2.a**, pourtant simple, n'a été correctement traitée que par trop peu de candidats, beaucoup se contentant d'affirmer le résultat, d'autres se lancent dans des démonstrations erronées par l'absurde avec des arguments du genre : « si f n'est pas bornée alors f tend vers l'infini… » ou on veut parfois utiliser le théorème de Rolle. En **2.b**, l'interversion formelle et le calcul sont parfois bien faits, la justification l'est beaucoup moins, on précise rarement la suite de fonctions à examiner et on se contente d'un vague « comme la convergence est normale, alors ... » ou on oublie f. En **2.c.**, beaucoup de justifications approximatives ou incomplètes. Le théorème permettant de démontrer le caractère C^1 d'une série de fonctions est très diversement connu ou appliqué.

3. Certains redémontrent que π est un endomorphisme, sans voir que le texte l'admet. D'autres ont des débuts d'idées sur ces questions mais peu de justifications correctes.
3.a et **b** : Questions peu traitées qui demandaient un peu de recul et de maîtrise. Peu de réponses correctes. L'étude de la subjectivité est rarissime ou faussement affirmée.

Partie III

1. On prouve souvent la 2π-périodicité de h, mais peu interprètent h comme une intégrale à paramètre et oublient la continuité.

2.a La plupart traitent la question par un changement de variable. L'utilisation des coefficients de Fourier est rarement bien menée jusqu'au bout, essentiellement par manque de connaissance de leurs propriétés. L'hypothèse de continuité sur les fonctions utilisées ressort rarement.
2.b. Peu de bonnes justifications sur cette question. On arrive souvent à affirmer $c_n(e) = 1$ pour tout entier n (et pas toujours bien justifié), mais on a du mal à trouver l'impossibilité.

3. Ceux qui abordent cette partie de fin de problème font parfois des manipulations hasardeuses d'inégalités. Certains ont des idées intéressantes mais ne les exploitent pas assez et manquent de précision.
3.a Cette question n'a pas posé de difficulté particulière.
3.b Le caractère borné des coefficients de Fourrier est souvent mal compris des candidats qui ont eu du mal à rédiger correctement cette question, ou exploiter $| c_n(\psi)| \leq \|\psi\|_{oo}$ afin de conclure.
3.c Quelques tentatives correctes avec l'égalité de Parseval, mais on ne sait pas toujours conclure.

3.d et **3.e** Peu de candidats voient le lien avec les valeurs propres. Par manque de temps les conclusions ont été hâtives. Ces questions n'ont été abordées et bien traitées que par les meilleurs candidats.

Conclusion :

La progressivité des questions a permis un bon étalement des notes. Nous ne pouvons que conseiller aux futurs candidats d'améliorer leurs préparations en mathématiques, se montrant capables de mettre en œuvre, sans erreur, les notions et techniques de base. Une bonne connaissance du cours est indispensable et de nombreuses questions posées sont souvent très proches de son application directe ; l'énoncé propose souvent une démarche de résolution qu'il convient de comprendre et de suivre en montrant son savoir-faire, ce qui est l'objet de l'évaluation.

La plupart des candidats a su tirer parti du sujet en mobilisant avec succès les connaissances du cours requises. Les étudiants éprouvent quelques fois des difficultés lorsque les questions portent sur l'existence des objets, ainsi que lorsque les questions concernent l'algèbre linéaire. Les concepts de bases (dérivation, existence d'intégrale, convergence des séries, des séries de fonctions) sont connus, mais les justifications sont peu rigoureuses quand ces dernières ne sont pas immédiates.
D'une part, on ne peut que conseiller aux étudiants de soigner la rigueur et la précision dans leur copie. D'autre part, une attention particulière se révèlerait particulièrement dans la connaissance approfondie du cours.

Globalement, ce sujet a permis de classer les candidats. La plupart a abordé un nombre très honorable de questions et ont montré certaines compétences en analyse. Les candidats sérieux qui se sont entraînés régulièrement ont pu faire leurs preuves. Les questions plus difficiles ont permis aux meilleurs d'entre eux de se détacher. Ceux qui n'ont pas suffisamment travaillé ont eu du mal à avoir des points.