1/ Présentation du sujet

Le sujet comportait deux exercices et un problème, tous indépendants.

- Le premier exercice demandait d'expliciter les termes de trois suites réelles $(u_n),(v_n)$ et (w_n) reliées par une relation de récurrence du type $\begin{pmatrix} u_n+1 \\ v_n+1 \\ w_n+1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ où $A \in M_3(\mathbb{R})$. L'utilisation de la calculatrice était de bon aloi.

- Dans le deuxième exercice, on caractérisait les projecteurs de rang 1 d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie comme les endomorphismes de E dont le rang et la trace sont égaux à 1. Pour l'aborder sereinement, il fallait avoir digéré l'algèbre linéaire de première année.

- Dans le problème, on se donnait une matrice S symétrique positive (ou symétrique définie positive) et on étudiait le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices. C'était un énoncé d'algèbre linéaire qui faisait un peu de place à la topologie.

2/ Remarques générales

Le texte de l'épreuve, qui comprenait des questions classiques et de véritables questions de cours, ne gagnait en nouveauté que sur la fin. Il a ainsi permis aux étudiants sérieux et appliqués à bien vérifier scrupuleusement toutes les hypothèses permettant l'utilisation d'un théorème donné, de tirer leur épingle du jeu.

Le texte était clair, de difficulté et de longueur raisonnables. Certains étudiants ont ainsi parcouru le problème en totalité, quelques-uns ont d'ailleurs réussi le sans-faute. Signalons toutefois que le premier exercice, qui ne pouvait être abordé sereinement qu'avec la calculatrice, a été en partie délaissé par certains (y compris de bons candidats).

Nous rappelons que des points du barème sont consacrés à la présentation et au soin apportés à la copie. Par exemple, une copie dont les résultats n'étaient pas soulignés ou encadrés était pénalisée.

Ce sujet a permis un net étalement des notes et a donc bien rempli son rôle de sélection des candidats.

La moyenne de l'épreuve est de 11,84 et l'écart type de 4,54.

3/ Remarques détaillées par question

Premier exercice

1. **(a)** Dans l'argument attendu « A matrice symétrique réelle», il manque parfois «réelle». Certains étudiants, malgré la précision «sans calcul» du texte, ont déterminé le polynôme caractéristique de A et ont conclu en constatant qu'il était scindé à racines simples.

   (b) Presque tous les candidats ont abordé la question des valeurs propres de A. Elles ont été déterminées, soit en une ligne avec la calculatrice, soit après un calcul manuel du polynôme caractéristique plus ou moins laborieux. Ceux qui ont poursuivi l'exercice par la détermination des vecteurs propres, l'ont fait manuellement et la méthode est globalement acquise.

   (c) Certains candidats ont pensé à tort pouvoir déterminer A^n en observant $A^2, A^3 \ldots$, d'autres se sont contentés d'écrire $A^n = PD^nP^{-1}$.

2. Plutôt bien traitée pour ceux qui sont allés au bout de la question 1. Sinon, ceux qui ont entamé cette question ont écrit généralement $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

Deuxième exercice

1. **(a)** Certains candidats ont confondu «supplémentaires» et «en somme directe» : ils se sont contentés de vérifier que $\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$. Certains candidats ont fait appel au lemme de décomposition des noyaux mais, ce faisant, quelques-uns ont oublié de rappeler que $\ker(p - Id) = \mathrm{Im}(p)$.

   (b) Bien traitée en général grâce à la représentation matricielle de p à l'aide d'une base adaptée à la décomposition précédente.

   (c) Remarquons que la matrice A de l'exercice 1 convenait. Certains candidats ont proposé Id_E ou $O_{L(E)}$, oubliant que ce sont des projecteurs de E.

2. Les candidats ont souvent exhibé une matrice diagonale pour A et une matrice nilpotente non nulle pour B. La justification pour B est alors souvent correcte, soit avec le polynôme minimal, soit avec le noyau dont la dimension n'est pas égale à la multiplicité de 0.

3. **(a)** L'erreur ici a été de penser que l'image et le noyau de u sont en somme directe. Sinon, le théorème de la base incomplète a été fréquemment évoqué mais malheureusement, certains ont complété une base de l'image, au lieu d'en compléter une du noyau.

   (b) La rédaction de cette question a souvent été confuse. Les candidats ont montré assez facilement que, si la trace de u est nulle, alors u est nilpotent de rang 1, donc non diagonalisable.
   L'autre implication n'a pas toujours été traitée et il y a eu des erreurs sur les conditions de "diagonalisabilité" (polynôme caractéristique scindé...).

   (c) Ceux qui ont abordé cette question n'ont eu aucune difficulté, en faisant $a_n = 1$ dans la matrice de la question 3a, à vérifier que cette matrice est égale à son carré.

(d) En notant (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et *u* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans (e_1,e_2,e_3) est A, certains étudiants ont proposé e_3 comme base de l'image au lieu de $u(e_3)$. Certains ont trouvé pour le noyau une bonne équation de plan mais n'ont ensuite donné qu'un seul vecteur au moment d'exhiber une base.

Problème

I. Questions préliminaires

1. (a) Nous pouvons globalement considérer que le théorème de réduction des matrices symétriques réelles est connu.

(b) Les candidats qui ont correctement calculé le polynôme caractéristique de S ont en général correctement conclu. Certains ont pensé que $\det(S)=0$ empêche S d'être diagonalisable, confondant «diagonalisable» et «inversible».

2. (a) Nous avons rencontré des résultats étranges, avec des carrés de vecteurs ou des coordonnées qui ne sont pas au carré. Certains calculs justes ne montrent toutefois pas clairement où intervient l'orthonormalité de la base.

(b) Certains candidats ont confondu la sphère unité avec la boule unité.

3. (a) Certains ont utilisé les vecteurs ε_i, d'autres ont pris une valeur propre quelconque λ et un vecteur propre associé x. Attention toutefois de bien spécifier que x est non nul et que sa norme est différente de 0.

(b) Pour l'expression de $s_{i,j}$ comme produit scalaire, les rôles de i et j ont parfois été inversés, ce qui était ici sans conséquence puisque s est symétrique. Certains ont pensé que la base canonique était une base de diagonalisation et ont écrit $s_{i,i}=\lambda_i$.

II. Un maximum sur $O_n(\mathbb{R})$

4. Si on note *f* l'application $M \mapsto {}^tMM-I_n$, on peut vérifier facilement que les coefficients de *f(M)* sont des polynômes en ceux de M, ce qui assure la continuité de *f*. Certains candidats ont évoqué la linéarité de la trace et la bilinéarité du produit et ont écrit une preuve juste à condition de composer correctement les applications. La principale erreur pour cette question est d'affirmer que *f* est linéaire. Certains se sont contentés de vérifier que *f(M)* est bien une matrice pour croire que *f* est continue.

5. Aucun problème si on exploite les coefficients de ${}^tAA=I_n$ ou si on sait que les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormale de E.

6. Nous avons parfois lu que «l'image réciproque d'un compact est un compact» ou que « $O_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\{-1;1\})$ ». Mais les candidats qui connaissent un peu de topologie ont bien négocié le trio de questions 4 – 5 – 6. Précisons que, pour vérifier que $O_n(\mathbb{R})$ est borné, il aurait été souhaitable de faire référence à une norme précise (peu importe laquelle).

7. **(a)** La propriété $\mathrm{Tr}(MN)=\mathrm{Tr}(NM)$ doit être utilisée avec soin. Avec plus de deux matrices, certaines permutations abusives ont conduit à $B = A$. Mais la question a été globalement bien traitée malgré l'oubli fréquent de la vérification de ${}^tBB=I_n$.

(b) Plutôt bien traitée, ce qui signifie une bonne connaissance générale des rudiments de topologie.

(c) De nombreux candidats ont su calculer la trace du produit et ont pensé appliquer la majoration du 5 au $b_{i,i}$. Pour trouver la valeur de *t*, ils ont pensé à utiliser la matrice I_n mais ont souvent oublié de préciser $I_n \in O_n(\mathbb{R})$.

III. Inégalité d'Hadamard

8. Bien traitée lorsque le candidat a exprimé le déterminant et la trace à l'aide des valeurs propres. Attention toutefois à préciser la positivité des valeurs propres avant d'utiliser l'inégalité arithméticogéométrique.

9. Nombreux sont les candidats qui ont oublié de vérifier que la matrice S_α est symétrique.

10. Aucun problème si le candidat a pensé à exprimer la trace de S_α (en fonction de ses coefficients diagonaux) et à utiliser l'inégalité $(*)$.

11. Beaucoup de candidats n'ont pas perçu l'intérêt d'introduire la matrice S_ε. Ils ont compris qu'il fallait utiliser l'inégalité de la question 10, mais ils n'ont pas précisé qu'on peut le faire car les coefficients diagonaux de S_ε sont bien strictement positifs. Le passage à la limite a ensuite été effectué avec plus ou moins de soin. Nous avons parfois lu des horreurs du style : « $\det(M+N) = \det(M) + \det(N)$ ».

IV. Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

12. Facile à condition d'être soigneux pour l'appartenance de B à U et de tout vérifier : $\det(B)=1, B$ est symétrique et B est définie positive.

13. Si la première inclusion n'a posé aucun problème, la deuxième est parfois passée inaperçue. Le problème de la borne inférieure a été mal compris en général ; nous avons souvent lu que «U est compact». Ceux qui ont évoqué l'argument «partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ », ont parfois affirmé sans preuve que ces ensembles sont minorés par 0.

14. Ceux qui ont bien calculé la trace du produit $B\Delta$ ont parfois utilisé l'inégalité arithméticogéométrique sans préciser «$b_{i,i}\lambda_i \geq 0$ ». Beaucoup de candidats ont confondu le déterminant de B et le produit de ses termes diagonaux.

15. C'est ici qu'il fallait utiliser l'inégalité d'Hadamard et pas dans la question précédente.

16. Beaucoup de candidats ont oublié de vérifier que $D \in U$ avant de conclure que le minorant $n(\det(S))^{\frac{1}{n}} = \mathrm{Tr}(D\Delta)$ de $\{\mathrm{Tr}(B\Delta) \backslash B \in U\}$ appartient à $\{\mathrm{Tr}(B\Delta) \backslash B \in U\}$.