1/ CONSIGNES GENERALES

Présentation du sujet

La première épreuve de mathématiques, d'une durée de quatre heures, était constituée de deux exercices et d'un problème, qui couvrent la quasi-totalité du programme d'analyse en filière TSI. Le premier exercice, qui pouvait être traité avec les connaissances de première année, aborde l'étude d'une suite récurrente. Le second exercice a pour but de résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre, en cherchant des solutions développables en série entière. Enfin, le problème permettait de calculer, par une méthode originale, l'intégrale de la fonction $x \longrightarrow \sin^2(x) / x^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Remarques générales

Cette épreuve, volontairement proche du cours et très progressive, a permis aux candidats d'avancer substantiellement. Les meilleurs candidats ont abordé la totalité du sujet, et ont traité avec succès environ 90 à 95 % de l'épreuve. La fin de l'exercice 2 et le problème comportaient des questions plus techniques et moins détaillées : celles-ci ont permis aux étudiants les plus brillants d'exprimer leur savoir-faire.

La présentation des copies est en général fort convenable et plutôt en progression par rapport aux années précédentes. Il est à noter que, cette année encore, un point sur 20 dans le barème récompensait les candidats ayant pris le temps de soigner la rédaction, la présentation et l'orthographe dans leurs copies. Il est dommage, par contre, que nombre d'entre eux oublient ou négligent de numéroter les pages de leurs copies, ou les classent dans un ordre aléatoire au moment de rendre leur composition.

Une tendance, déjà observée l'an passé, semble prendre de l'ampleur : certains candidats mentionnent une erreur d'énoncé lorsqu'ils ne trouvent pas la réponse souhaitée. Enfin, ceux qui cherchent à obtenir à tout prix le résultat demandé, en falsifiant manifestement leurs calculs, ont été sanctionnés.

Principales lacunes décelées

Le raisonnement par récurrence, la recherche rigoureuse de solutions développables en série entière d'une équation différentielle, ou encore la manipulation d'inégalités ont posé des difficultés à de nombreux candidats.

Par contre, les études de fonctions, les convergences de séries ou d'intégrales impropres, les développements en séries entières des fonctions usuelles, ou encore le cours et les calculs sur les séries de Fourier semblent bien maîtrisés.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES

Exercice 1

Question 1. b) Cette étude de fonction a été traitée correctement dans l'immense majorité des copies. Par contre, la justification de la dérivabilité a été plus hasardeuse. En particulier, la continuité de f n'entraîne pas sa dérivabilité.

Question 2. a) Le théorème des valeurs intermédiaires n'assure pas, à lui seul, l'unicité de la solution. La stricte-monotonie de la fonction f sur les deux intervalles considérés devait être mentionnée. La notion d'application bijective est rarement évoquée.

Question 2. b) Quelques candidats ne semblent pas avoir compris la définition du réel β.

Question 3. L'allure de la courbe est le plus souvent correcte, mais il est dommage que les points d'abscisses β et γ n'aient pas toujours été placés. De même, il était judicieux de mettre en évidence le point d'abscisse 2 (minimum de la fonction) et de tracer une tangente horizontale en ce point.

Question 4. b) Les confusions entre les variations de la fonction f et les variations de la suite (u_n) sont nombreuses. La positivité de la fonction f sur l'intervalle $[0, \beta]$ n'a été que très rarement invoquée.

Question 4. c) L'argument « (u_n) est une suite croissante et majorée par β » est souvent mentionné, mais il permet seulement de conclure que la suite converge. Un dernier argument était nécessaire pour obtenir la limite de la suite (u_n). Celui-ci n'a pratiquement jamais été donné.

Question 4.d) Cette question d'algorithmique n'a été traitée correctement que par quelques candidats. Pourtant, elle ne présentait pas de difficulté particulière, puisqu'une simple boucle FOR permettait d'y répondre.

Exercice 2

Question 2. a) Le théorème de dérivation terme à terme des séries entières n'a été que trop rarement cité pour justifier le résultat. On note aussi quelques erreurs d'indices dans les sommes de séries.

Question 2. b) Peu de candidats pensent à invoquer l'unicité du développement en série entière pour obtenir la relation de récurrence entre a_n et a_{n-2}.

Question 3. La règle de d'Alembert est souvent mal rédigée ou mal utilisée. La notion même de rayon de convergence semble poser des difficultés à un nombre important de candidats, qui annoncent un rayon de convergence nul (ce qui poserait manifestement problème ici), ou pire, un rayon de convergence qui dépendrait de la variable p.

Question 4. Cette question de cours a été plutôt bien réussie. On note quelques erreurs dans les rayons de convergence.

Question 5. L'expression exacte de $g(x)$ pour x non nul n'a été que très rarement obtenue. Curieusement, certains candidats n'ont pas vu le lien avec la question précédente.

Questions 6. et 7. Ces deux questions ont été peu abordées et correctement traitées par une minorité de candidats. Dans la question 6, la dimension de l'espace vectoriel des solutions est souvent exacte, mais celle-ci n'est quasiment jamais justifiée.

Problème

Question A.1. Cette question est globalement très bien traitée par les candidats, sauf quelques-uns qui n'ont pas remarqué que la deuxième série était aussi une série de Riemann.

Question B.1. Les représentations graphiques inexactes ont été assez fréquentes. Une lecture attentive de la définition de la fonction f aurait sûrement permis d'éviter ces erreurs.

Question B.2. Les expressions des coefficients de Fourier sont bien connues et le calcul effectif de ces coefficients a été mené avec succès dans de nombreuses copies.

Question B.3. L'énoncé de la formule de Parseval est le plus souvent exact. Néanmoins, la fin de la question a donné lieu à de nombreux « passages en force ». En effet, certains candidats ont cherché à tout prix à obtenir le résultat annoncé par l'énoncé, alors même que leurs coefficients de Fourier étaient inexacts ! Ce manque d'honnêteté intellectuelle a été sanctionné.

Questions C.1. et C.2. Les convergences d'intégrales impropres sont, dans l'ensemble, bien rédigées. Par contre, certains candidats utilisent l'équivalent usuel « $\sin u \sim u$ » sans préciser que la variable u tend vers 0. Cet équivalent ne pouvait bien sûr pas être utilisé lorsque u tend vers l'infini.

Question C.4. La manipulation des inégalités, notamment de l'inégalité triangulaire, a conduit à de nombreuses erreurs. Là encore, le résultat à obtenir étant donné, il convenait de détailler en quelques lignes les étapes successives dans les majorations. Il est regrettable de voir disparaître les valeurs absolues dans les inégalités, pour les voir réapparaître, par magie, en guise de conclusion.

Question C.5. Cette question a souvent été mal traitée : erreurs dans les majorations, inégalités inexactes par passage à l'inverse.

Question C.6. La première égalité a visiblement dérouté les candidats, alors qu'il ne s'agissait que de la relation de Chasles sur les intégrales. Par contre, la deuxième égalité a été mieux traitée.

Question C.7. Trop peu de candidats ont utilisé les questions précédentes pour obtenir rigoureusement un majorant de la valeur absolue de h'.

Question C.9. Cette dernière question, qui faisait la synthèse des résultats précédents, a été rarement abordée. Le plus souvent, les manipulations d'inégalités, tout comme le passage à la limite quand α tend vers 0 par valeurs supérieures, ont donné lieu à des approximations ou des erreurs flagrantes.

Conclusion

Les résultats de cette épreuve sont assez satisfaisants : une partie significative des candidats ont acquis les techniques de base en analyse. Il reste néanmoins plusieurs domaines à améliorer : équations différentielles, séries entières, ou manipulation des inégalités par exemple.

Outre une certaine maîtrise technique dans les calculs, les énoncés du cours doivent être parfaitement connus pour pouvoir bâtir un raisonnement mathématique de qualité. De façon générale, les correcteurs recommandent aux futurs candidats de s'entraîner tout au long de l'année à réellement **chercher** et **rédiger** des sujets de mathématiques.