1/ Présentation du sujet

Le sujet comportait un exercice et un problème indépendants.

- L'exercice demandait de tracer l'hyperbole d'équation $x^2 - 13y^2 = 1$ puis d'en déterminer des points à coordonnées entières à l'aide d'un algorithme que l'on devait écrire puis programmer sur la calculatrice.

- Le problème proposait l'étude des matrices toutes-puissantes sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire des matrices qui admettent pour tout entier n une racine n-ième à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les notions abordées étaient assez variées, racines n-ièmes d'un réel, d'un nombre complexe, matrice d'une rotation plane, diagonalisation d'une matrice, indice d'une matrice nilpotente, sous-espaces caractéristiques, réduction de Dunford (sans le dire), utilisation des développements limités pour l'existence d'une racine n-ième pour une matrice unipotente.

2/ Appréciation générale des copies

Le texte de l'épreuve était clair, de difficulté et de longueur raisonnables. Beaucoup d'étudiants ont ainsi parcouru le problème en totalité, quelques-uns ont d'ailleurs réussi le sans-faute. Signalons toutefois que l'exercice a souvent été évité ou traité en dernier. Le spectre des notes est extrêmement large. Les résultats sont dans l'ensemble satisfaisants, sauf pour l'exercice.

La présentation et le soin apportés aux copies ne sont pas toujours satisfaisants. Signalons que des points du barème y sont consacrés. Par exemple, une copie dont les résultats n'étaient pas soulignés ou encadrés était pénalisée.

Ce sujet a rempli son rôle de sélection des candidats.

3/ Erreurs rencontrées

Exercice

1. Les mots «hyperbole» et «algorithme» semblent avoir effrayé. Pourtant le tracé de la courbe ne nécessitait pas forcément de connaître tout «l'arsenal» sur les coniques, on pouvait avec un minimum de réflexion se ramener par exemple à l'étude du graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-1}{13}}$.

Il est regrettable d'avoir des graphes farfelus alors que l'énoncé précisait qu'il s'agissait d'une hyperbole et que la calculatrice était autorisée. Les asymptotes obliques ont souvent été oubliées.

2. Peu de succès. Les algorithmes proposés sont parfois faux. Le caractère entier des solutions n'est pas toujours pris en compte.

3. Question rarement traitée, pourtant elle rapportait un nombre important de points.

Problème : matrices "toutes-puissantes"

I. Quelques exemples

1. (a) L'égalité $T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ nécessitait une double inclusion qui a eu peu de succès. On rappelle ainsi que si $x \geq 0$, le nombre $x^{\frac{1}{n}}$ désigne l'unique réel positif y tel que $y^n = x$, en particulier si $x < 0$ et *n* pair, ce nombre n'est pas défini.

(b) Beaucoup de candidats ne connaissent pas les racines *n*-ièmes d'un nombre complexe *b*, ou se trompent en essayant de les retrouver.

(c) La réponse attendue $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ a en général été donnée malgré quelques réponses exotiques.

2. (a) La clef était la multiplicativité du déterminant. Malgré quelques formules fausses, la question a globalement été réussie, parfois en distinguant les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ce qui n'était pas nécessaire.

(b) Il suffisait de proposer une matrice de déterminant strictement négatif.

3. En général bien traitée, même si certains se sont trompés dans le carré d'une matrice de taille 2.

4. (a) Question classique plutôt réussie, soit en déterminant la dimension des espaces propres, soit en affirmant que le polynôme $(X-1)(X-2)$ scindé à racines simples est annulateur de A.
Signalons tout de même une erreur rencontrée dans un certain nombre de copies : le polynôme $(X-2)^2(X-1)$ serait à racines simples.

(b) Question assez réussie.

(c) Il suffisait de faire un produit matriciel à l'aide de la calculatrice.

5. (a) Assez réussie, mais attention à la justification fausse « $\det A = 1$ donc A est la matrice d'une rotation» (il est nécessaire de savoir avant que A est orthogonale).

(b) Question à ressource géométrique, moyennement réussie.

6. (a) Les réponses ne sont généralement pas très bien rédigées. Souvent, les candidats donnent sans justification le polynôme caractéristique et certains oublient le $(-1)^p$ dans l'expression, $\chi_N = (-1)^p X^p$.

(b) Question un peu plus difficile que les autres. On a pu observer l'erreur « $N^p = N^{p-1} = 0$ donc $N = 0$ ». Attention, l'anneau $M_n(\mathbb{K})$ est non intègre.

II Le cas "scindé" se ramène au cas des matrices de la forme $\lambda I_p + N$

7. Question souvent bien traitée, il fallait évoquer le théorème des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton. Signalons toutefois que certains pensaient que les sous-espaces C_i étaient les sous-espaces propres.

8. **(a)** Question dans l'ensemble bien traitée, même si elle a donné lieu à pas mal d'erreurs :

- «comme u commute avec v et que u commute avec $Q(u)$ alors v commute avec $Q(u)$». La relation commuter n'est pas transitive, car si elle l'était, tout endomorphisme commuterait avec tout autre endomorphisme puisque tout endomorphisme commute avec l'identité.
- « $Q(u \circ v) = Q(u) \circ Q(v)$ » ou « $Q(u \circ v) = Q(u) \circ v$ »
- des expressions incorrectes du genre « $Q(u(x))$ », au lieu de « $Q(u)(x)$ ».

(b) Souvent réussie.

9. Certains redémontrent la linéarité et confondent C_i avec un sous-espace propre.

10. Globalement assez réussie.

11. Souvent réussie. On travaille avec les blocs.

III Le cas des matrices unipotentes

12. **(a)** Question qui demandait un certain soin qui a souvent été escamotée.
(b) Certainement la question la plus délicate du problème qui a rarement été réussie.
(c) Question en général réussie. Il fallait toutefois rappeler que $1 + X - U^n$ est un polynôme.

13. **(a)** Question souvent réussie mais attention à la substitution d'un polynôme par une matrice, il fallait écrire $I_p + N = U(N)^n + N^p Q(N)$ et non pas $I_p + N = U^n + N^p Q$.
(b) Ceux qui ont le réflexe de mettre λ en facteur terminent la preuve aisément.

14. **(a)** Question qui demandait de rassembler la plupart des résultats précédents.
(b) Question ouverte qui demandait juste de se souvenir du résultat de la question 6.
A noter que certains bons candidats, en utilisant la densité des matrices inversibles, concluent par l'affirmative, bien sûr à la suite d'une erreur de raisonnement.

15. Le correcteur n'a pas à vérifier lui-même que A est diagonalisable, non inversible et toute puissante.