

ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 2

Présentation de l'épreuve

L'épreuve, d'une durée de trois heures, était consacrée au calcul de l'intégrale de Gauss par deux méthodes, puis à la détermination de plusieurs développements en série entière. Les quatre parties, largement indépendantes, abordaient de nombreux points du programme d'analyse.

La partie I était consacrée à l'étude d'une fonction et à l'existence de l'intégrale de Gauss. La partie II présentait la première méthode de calcul de cette intégrale, en s'appuyant sur l'étude de fonctions définies à l'aide d'une intégrale. On utilisait une intégrale double dans la partie III pour la deuxième méthode de calcul. Enfin, la partie IV portait sur des développements en série entière et une équation différentielle linéaire.

Le sujet, très progressif, a permis aux candidats sérieux d'avancer substantiellement dans le problème, les meilleurs d'entre eux traitant quasiment l'intégralité de celui-ci. En revanche, les candidats les plus faibles n'ont abordé que quelques questions, malgré la relative facilité d'une partie importante de l'énoncé.

Remarques générales

L'énoncé permettait de couvrir une grande partie du programme d'analyse des deux années de la filière TSI : étude de fonctions, théorème fondamental de l'intégration, intégrale dépendant d'un paramètre, intégrale double, étude des séries entières (développement en série entière, intégration et dérivation terme à terme, unicité du développement), équation différentielle linéaire.

On attend bien sûr des candidats une connaissance précise des théorèmes du cours avec les hypothèses exactes du programme. De plus, l'étude des fonctions en analyse (existence et valeur d'une limite, dérivabilité,...) repose très souvent sur des majorations ou des encadrements. Il est donc indispensable de savoir maîtriser les outils permettant d'établir ces inégalités : étude de fonctions, croissance de l'intégrale, ...

Enfin, il est bon de rappeler certains points fondamentaux dans la rédaction et la présentation des copies. On ne peut se contenter d'aligner des calculs (parfois faux) sans la moindre ligne de justification. Cette absence de phrase explicative est bien évidemment sanctionnée. En particulier, si l'énoncé donne le résultat à démontrer, on ne pourra se satisfaire de réponse se contentant d'affirmer que l'énoncé « a raison ». Il faut également faire très attention à la logique de sa rédaction en précisant s'il s'agit d'implications ou d'équivalences et pour quelles valeurs des variables le résultat est vérifié.

Pour conclure, des points sont également réservés à la présentation et à la correction de la copie. Il faut en particulier insister sur l'orthographe, qui, dans de trop nombreuses copies, est désastreuse. Cela entraîne bien sûr une sanction finale sur les points consacrés à cette rubrique, mais également une lassitude certaine du correcteur.

Remarques particulières

Partie I

Les questions **1.a.** et **1.b.** sont bien traitées.

La question **2.** est en revanche très rarement réussie, les candidats cherchant à appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, alors qu'il s'agissait d'une application du théorème fondamental de l'intégration (la variable x est dans la borne, et non dans la fonction intégrée).

Dans la question **3.**, la continuité de la fonction intégrée n'est que très rarement évoquée et il est fréquent de trouver dans les copies une majoration de l'intégrale dont on veut montrer l'existence, et non une majoration de la fonction à intégrer.

Partie II

La question **1.** est très mal traitée. Il s'agissait d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. Les hypothèses de régularité proposées sont souvent fausses ou inutiles (on évoque l'intégrabilité d'une fonction de deux variables sur un intervalle, on calcule la dérivée partielle par rapport à la variable d'intégration ce qui est inutile) et l'hypothèse de domination est très rarement traitée correctement. Il est bon de rappeler à ce sujet que le programme ne fait référence à aucun théorème spécifique à l'intégration sur un segment et qu'il faut donc vérifier les hypothèses du seul théorème au programme.

La résolution de la question **2.a.** nécessitait d'avoir correctement dérivé les fonctions F et G , ce que peu de candidats ont su faire. Cela n'a pas empêché de nombreux "passages en force" pour trouver miraculeusement une dérivée nulle !

La question **2.b.**, simple calcul de $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$, a été moins bien réussie qu'attendu.

Les inégalités demandées à la question **3.a.** ne sont pas souvent correctement établies, certains candidats se contentant même de les vérifier pour $t = 0$ et $t = 1$. Le théorème des encadrements est alors souvent utilisé avant d'intégrer ces inégalités.

La positivité de I n'est pratiquement jamais évoquée à la question **3.b.**

Enfin, la question **4.** est moyennement réussie, manifestement souvent avec la calculatrice (certes autorisée) puisque la dérivée de F est, dans de nombreuses copies, absente, voire fausse et en contradiction avec le graphe.

Partie III

Les questions **1.** et **2.** sont en général bien réussies quand elles sont abordées, même si, encore une fois, l'énoncé donnant le résultat, certaines copies concluent avec une mauvaise foi manifeste des calculs faux et souvent dépourvus de sens.

La question **3.a.** a donné lieu à des graphes divers et variés, alors qu'il s'agissait de tracer deux quarts de cercle et un carré...

A la question **3.b.**, la positivité de la fonction intégrée n'est presque jamais mentionnée. En revanche, on voit très souvent apparaître des arguments d'aire, totalement infondés.

La question **4.** est bien traitée quand elle est abordée.

Dans la question **5.**, les arguments attendus de continuité et de positivité sont systématiquement absents.

Partie IV

La question **1.a.**, simple question de cours, a donné lieu à de multiples confusions entre somme d'une série, sommes partielles et développements limités.

L'existence du développement en série entière demandé à la question **1.b.** est souvent justifiée à tort par le fait que la fonction est C^∞ , voire continue. De plus, pour de nombreux candidats, $(-x^2)^n = -x^{2n}$.

La question **2.a.** n'est presque jamais réussie alors qu'il s'agissait d'une question d'application directe du cours.

C'est un peu mieux à la question **2.b.**, même si les calculs ne sont pas toujours menés à leur terme. La question **3.a.** abordait une méthode très importante et classique. Malheureusement, seul le décalage d'indice est traité à peu près correctement, sans que l'on voit les justifications indispensables attendues : la dérivation terme à terme et le théorème d'unicité du développement en série entière (un peu plus présent cependant).

Le cas des coefficients pairs est à peu près expliqué à la question **3.b.**, mais celui des coefficients impairs consiste souvent, encore une fois, à trouver coûte que coûte le résultat de l'énoncé.

Pour le calcul du rayon de convergence à la question **3.c.**, on rappelle qu'il faut former le quotient, en valeur absolue, de deux termes consécutifs de la série, puissances de x comprises (pour x non nul bien sûr). Puis, il s'agit de simplifier les factorielles, ce qui a souvent donné lieu à des difficultés insurmontables.

La question **3.d.** demandait de vérifier que g était solution de l'équation (E) étudiée, ce qui nécessitait d'avoir la bonne expression de la dérivée de F .

La question **3.e.**, plus délicate, a tout de même été traitée un peu plus souvent qu'on ne pouvait le croire.

Conclusion

Tout ce qui précède n'a qu'un seul but : aider les futurs candidats à préparer au mieux le prochain concours. Pour cela, nous leur conseillons, comme le font leurs enseignants tout au long de l'année, de connaître avec précision les hypothèses des théorèmes au programme, de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles (théorèmes des encadrements, dérivation des intégrales à paramètre, développement en série entières,...) et de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire et structurée. Il faut également aborder tous les chapitres, sans négliger les notions vues en fin d'année, comme les intégrales doubles. Enfin, il est indispensable de reconnaître que l'on ne sait pas résoudre une question, sans essayer un quelconque passage en force, surtout quand l'énoncé fournit le résultat.

Incontestablement, la charge de travail est lourde pendant ces deux années, mais la perspective d'intégrer l'école de leur choix doit inciter les candidats à fournir le meilleur d'eux-mêmes. C'est ainsi que nous avons eu le plaisir de corriger de nombreuses copies montrant un niveau tout à fait encourageant. Le travail est toujours récompensé : bon courage aux futurs candidats !