Le problème de l'épreuve de Mathématiques 1 abordait l'étude de la droite de régression linéaire de *y* en *x* associée à un nuage de points en utilisant la réduction d'une forme quadratique d'une part et en calculant une projection orthogonale d'autre part. Le problème était précédé d'un exercice classique de recherche des éléments propres d'un endomorphisme dans un espace de polynômes.

## Remarques générales

La plupart des copies sont propres et bien présentées. Cela a été bien sûr valorisé dans l'évaluation des copies.

Cependant, la rédaction reste parfois encore trop succincte. Il est nécessaire de justifier les résultats.
L'utilisation de la calculatrice dans cette épreuve, bien qu'autorisée, ne permet en aucun cas de faire l'économie d'une rédaction claire des raisonnements. Rappelons qu'une phrase doit comporter un sujet, un verbe et un complément et le candidat ne doit pas négliger l'orthographe.

Dans l'ensemble, les candidats ont abordé toutes les questions et ont su tirer parti des nombreuses questions numériques. La recherche des éléments propres et la technique de diagonalisation d'une matrice ou d'un endomorphisme sont dans l'ensemble des compétences acquises.

Il y a très peu de copies faibles ou n'abordant qu'un petit nombre de questions.

## Principales lacunes décelées

Les critères de diagonalisation sont connus mais parfois mal énoncés ou incomplets. Par exemple, les justifications « les valeurs propres sont distinctes » ou « il y a quatre valeurs propres » doivent être étayées par la dimension de l'espace dans lequel on travaille. Le fait que le polynôme caractéristique soit scindé n'est pas suffisant pour assurer la diagonalisibilité de la matrice.

Les candidats savent qu'une matrice symétrique réelle $A$ est diagonalisable mais peu connaissent le résultat complet : le fait que l'on puisse choisir une matrice orthogonale $P$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale n'est pas clair. Rappelons que pour une matrice symétrique réelle, les sous-espaces propres sont nécessairement orthogonaux deux à deux. Ainsi, pour expliciter la matrice orthogonale $P$, il suffit de choisir des bases orthonormées de chaque sous-espace propre.

Ici, comme les deux sous-espaces propres étaient de dimension 1, il suffisait de normer les deux vecteurs colonnes de la matrice $P$.

Il y a des confusions dans les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité.

## Remarques particulières

- L'exercice a posé quelques difficultés dans l'interprétation de $P$ (X + 1). Pourtant, l'exemple du calcul de l'image de $\varphi$ (X) et les réponses de la question 1 ne pouvaient laisser de doute.
- La question 4 de l'exercice a été trop rapidement rédigée. Le fait que l'application $\varphi$ va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ demande une justification rigoureuse.
- Dans la question 5, une erreur de notation a été relevée par quelques candidats. Il fallait lire $I_4$ et non $I_3$ pour la matrice identité. La prise d'initiative des candidats qui ont rétabli d'eux-mêmes la bonne notation a été valorisée. Les rares candidats qui ont tout de même additionné une matrice d'ordre 4 avec une matrice d'ordre 3 n'ont pas été pénalisés.
- Il est étrange d'obtenir des sous-espaces propres réduits au vecteur nul. Un sous-espace propre est toujours au moins de dimension 1.

  Dans l'exercice, les vecteurs sont des polynômes. La majorité des candidats écrivent les sous-espaces propres de la matrice $M$ et ne pensent pas à écrire les sous-espaces propres correspondants de l'endomorphisme $\varphi$.
- Certains candidats se précipitent sur les techniques d'étude d'extremum local (gradient par exemple) alors qu'il s'agissait ici de l'étude d'un minimum global. Il suffisait d'utiliser le fait que le carré d'un nombre réel est positif.
- L'affirmation « $\mathcal{B}$ est une base » n'est pas suffisamment précise. Il faut préciser « $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel $E$ ».

  Dans les questions l et 2 de la partie II, il faut montrer qu'une certaine famille constitue une base de Im $f$. Avant de montrer que la famille est libre, il faut commencer par vérifier que les vecteurs de la famille appartiennent bien à Im $f$. Très peu de candidats écrivent dans la question 1 qu'on a Im $f$ = vect ($C_1$ , $C_2$) et concluent que la famille ($C_1$ , $C_2$) est une base <u>de Im $f$</u>.
- Rares sont les candidats qui ont donné une équation du plan Im $f$. Certains ont une équation du type $ax+by+cz=d$ avec $d \neq 0$. Rappelons que Im $f$ est un plan vectoriel et donc qu'il contient le vecteur nul : la constante est donc nulle !
- Le théorème du rang est mal énoncé. On lit parfois dim ( $f$ ) = dim (Ker $f$ ) + rg ( $f$ ) ou d'autres formules exotiques.

  Il y a eu des erreurs concernant l'espace de départ. L'application linéaire $f$, comme cela est spécifié dans l'énoncé, part de $\mathbb{R}^2$ et arrive dans $\mathbb{R}^2$. De sorte que le théorème du rang s'écrit

  $$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \mathrm{rg}(f)$$

  Par ailleurs, il y a équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité en dimension finie mais à condition que l'espace de départ soit de dimension identique à l'espace d'arrivée ce qui n'était pas le cas ici.
- La méthode de Schmidt est dans l'ensemble connue mais rarement menée au bout sans erreur. Il était pourtant facile de vérifier l'orthogonalité des deux vecteurs obtenus.
- Les deux dernières questions du problème ont été mal comprises. Il s'agissait de retrouver les résultats de la partie I par une <u>autre</u> méthode i.e en utilisant les résultats de la partie II.

## Conclusion

Les résultats de cette épreuve sont dans l'ensemble satisfaisants. Certaines techniques de première et deuxième années sont acquises. On encourage les futurs candidats non seulement à maîtriser ces techniques mais aussi à apprendre précisément les énoncés des théorèmes utilisés et à porter leur attention sur quelques points de logique (par exemple la différence entre condition nécessaire et suffisante).