MATHEMATIQUES 2

Rapporteur Monsieur Rémi COUTENS

Le sujet proposait l'étude d'endomorphismes de l'espace usuel $\mathbf{R}^3$. On y utilisait à la fois des résultats de première année (nombres complexes, formule de changement de bases) et la quasi totalité du programme d'algèbre linéaire de seconde année (éléments propres, utilisation d'une matrice diagonale, matrices semblables, matrices symétriques réelles, matrices orthogonales, rotations vectorielles...).

Remarques générales

Nous notons avec satisfaction que, dans l'ensemble, la présentation des copies est bonne et que les candidats font des efforts de rédaction. Il est très rare d'avoir à sanctionner une copie sur ces points. Rappelons néanmoins pour certains qu'on ne peut se contenter d'un résultat brut sans aucune explication. Par exemple, dans quelques copies pour la question 1.c), on lit uniquement

$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_1 \wedge \mathbf{e}'_2 = 1/\sqrt{6}\ (1, 1,-2)$.

De même, une « réponse » du type « *d'après les questions précédentes, on a le résultat demandé* » (sic) laisse pantois.

Doit-on également signaler qu'une phrase comporte un sujet, un verbe, un complément ?

Enfin, dans une poignée de copies, l'orthographe est plus que fantaisiste (ce qui naturellement va souvent de pair avec une pensée confuse).

Le sujet était bien progressif, proposait des méthodes variées (par exemple polynôme caractéristique puis éventuelle diagonalisation *versus* diagonalisation puis polynôme caractéristique) et a permis de bien classer les candidats. La plupart d'entre eux abordent environ ¾ des questions posées (avec des réussites diverses). Comme toujours, on rencontre une poignée de copies extrêmement faibles, quelques rares copies brillantes, mais il a semblé aux correcteurs que le nombre de copies faibles était plus important cette année ce qui est peut-être lié à l'augmentation du nombre de candidats.

Si on laisse de côté ces copies faibles, on peut dire que dans l'ensemble les techniques de calculs sont connues : on sait déterminer un rang (par considérations sur les vecteurs colonnes ou par la méthode du pivot), calculer un déterminant, déterminer l'image d'un vecteur, trouver les valeurs propres etc. Le cours est connu mais les tenants et aboutissants ne sont pas toujours maîtrisés.

Principales lacunes décelées

• Malgré le préambule et le préliminaire (on avait indiqué qu'il était important et qu'il servirait plusieurs fois), de nombreux candidats ne semblent pas reconnaître la droite Δ ni le plan P. Certains proposant même une autre base de P que celle proposée (qui, elle, avait l'intérêt d'être orthonormée).
• Méconnaissance totale du lien entre le rang d'une matrice carrée et son inversibilité.
• À propos du déterminant : comme toutes les matrices du sujet de cette année étaient carrées d'ordre 3, les candidats usent et abusent du déterminant !

--- pour les calculs, ils sont nombreux à en être restés à la version (un peu naïve) complètement développée du cours de première année. Par exemple après l'opération élémentaire proposée au 5.b), certains développent ce qui fait perdre toute l'efficacité de la méthode proposée ! Et on se demande ce qu'il serait advenu de ces candidats si on avait demandé le calcul d'un déterminant d'ordre supérieur.
--- concernant les automorphismes orthogonaux de $\mathbf{R}^3$, le fait qu'un déterminant soit égal à 1 ne prouve pas (à lui seul) que l'on est en présence d'une rotation. Quant au cas d'un déterminant -1, c'est encore plus délicat (entre autres, cas de *-Id* automorphisme orthogonal qui n'est pas une réflexion).
• La formule de changement de bases n'est correcte que dans un petit quart des copies.
• Enfin, la logique révèle beaucoup de faiblesses. En étant optimiste, on peut parfois penser à des maladresses de rédaction, mais souvent il y a des erreurs flagrantes :
--- au 9.c) la question demande clairement un « si, et seulement si, » or la réponse majoritaire est « *quand b = c, les valeurs sont effectivement réelles* ».
--- au 3.c) on se contente le plus souvent de « *il faut que le troisième soit le produit vectoriel des deux premiers* ». Cela ne répond pas à la question : il fallait expliquer pourquoi c'était suffisant.
--- « *le polynôme caractéristique n'est pas scindé à racines simples donc la matrice n'est pas diagonalisable* » (ce qui est faux).

Autres points question par question

1.a) Certains ne savent pas justifier que le vecteur dirige la droite Δ.
2.a) On reconnaît généralement une situation $f(u) = \lambda u$ ou $MX = \lambda X$ mais il est trop rarement précisé que le vecteur utilisé est non nul.
2.b) Rares sont ceux qui savent qu'une famille orthonormale est libre. En revanche, trop souvent la famille est « *clairement* » génératrice alors qu'on attendait un argument de dimension.
2.d) Rarement correctement traitée alors qu'une argumentation autour des concepts de bases et de linéarité est centrale en algèbre linéaire.
3.b) La notion de polynôme scindé dans $\mathbf{R}[X]$ n'est pas claire. Les liens entre scindé/scindé à racines simples/diagonalisable sont très confus.
3.c) Souvent fausse car soit la formule de changement n'est pas correcte, soit on écrit la matrice des vecteurs $f(e')$ mais dans la base *B*.
3.d) Quand la matrice est correcte, on reconnaît en général une matrice de rotation (en oubliant de préciser que *B'* est bien une base orthonormée directe) mais quelques erreurs pour l'axe.
4.b) Confusion fréquente entre matrice symétrique et symétrie.
4.c) Le « en déduire » est rare, pourtant deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Très souvent, les candidats « oublient » de tenir compte des dimensions et donnent un polynôme de degré 2 ce qui devrait les faire réagir.
5.d) On reconnaît rarement une projection.
6°) Beaucoup d'erreurs pour cette question pourtant élémentaire.
7°) Presque 100 % de réussite, c'est satisfaisant.
8°) Assez bien réussie dans l'ensemble.
9.a) Très peu de réussite malgré les indications explicites du sujet. Nombreux sont ceux qui croient qu'une somme de matrices diagonalisables l'est aussi, ce qui est faux.
11°) La plupart des candidats connaissent le résultat concernant les matrices symétriques réelles mais ne proposent pas toujours une matrice vraiment orthogonale. La subtilité concernant le fait que la matrice *Q* devait être indépendante des réels *a*, *b* et *c*, n'a pas été vue.
12°) Très peu abordée.

Conclusion

Nous encourageons les futurs candidats à bien travailler les techniques habituelles (résolution de système, rang, déterminant, ce qu'on peut résumer en : méthode du pivot), à connaître les théorèmes du cours — de première comme de seconde année — de façon très précise afin de pouvoir prendre plus de recul et d'être plus efficace le jour du concours.