MATHEMATIQUES 1

Rapporteur Monsieur Joël BRAUNER

Présentation de l’épreuve

L’épreuve, d’une durée de quatre heures, était composée de trois exercices totalement indépendants.
Le premier exercice portait sur les séries de Fourier et les intégrales généralisées.
Le second exercice étudiait une fonction définie par une intégrale.
Enfin, le dernier exercice avait pour thème l’étude de quelques propriétés d’une fonction définie comme somme d’une série entière.
Le premier et le troisième exercice ont été largement abordés par la majorité des candidats.
Le deuxième exercice qui faisait pourtant appel à des outils de base en analyse (encadrements, équivalents, sommes de Riemann) a connu moins de succès.

Remarques générales

Le choix d’une épreuve à exercices visait à vérifier le plus largement possible les connaissances acquises en analyse au cours des deux années de préparation aux concours.
Les exercices comprenaient de nombreuses questions permettant aux candidats de montrer leur connaissance du cours (théorèmes de Dirichlet ou Parseval, inégalité des accroissements finis, théorème des valeurs intermédiaires, théorème de dérivation terme à terme pour une série entière ou encore somme d’une série géométrique) ; ces questions qui auraient permis aux candidats de récolter un grand nombre de points n’ont pas toujours été très réussies.
Pour en terminer avec ces remarques générales, je voudrais dire un mot de la présentation qui peut certainement être améliorée. Mais c’est surtout au niveau de la rédaction que nous avons noté une grande insuffisance, les réponses aux questions posées consistant bien souvent en des lignes de calculs, placées les unes en dessous des autres, sans qu'il soit précisé s'il s'agit d'équivalences ou d'implications. De plus, l'absence quasi systématique de quantificateurs ne permet pas de savoir pour quelles valeurs de la variable les égalités ou inégalités utilisées sont valides.
Enfin, nous avons constaté que beaucoup de candidats tentent par tous les moyens de faire correspondre les résultats de leurs calculs avec ce qui est demandé dans l’énoncé.
Lorsqu'il y a une différence entre le résultat obtenu et celui qui figure dans l'énoncé, il vaudrait certainement mieux (ainsi que le font certains) prendre acte de ce problème plutôt que de tenter un passage en force. Certains vont d'ailleurs même jusqu'à annoncer de façon péremptoire que l'énoncé est inexact, ce qui bien sûr peut arriver mais de façon relativement rare tout de même.

Remarques particulières

Exercice 1

Dans la première question, bien peu de candidats parviennent à justifier correctement $f(0)=f(\pi)=0$. La question 2, quant à elle, est plutôt bien réussie.

Dans la question 3a , la majorité des candidats sait que pour une fonction impaire, les coefficients a_n sont nuls, mais beaucoup d'entre eux pensent que ce n'est vrai que pour $n \geq 1$. En ce qui concerne les b_n, si la formule générale est souvent correcte, le calcul effectif est rarement mené à son terme.

La question 3b utilisait le théorème de Dirichlet dont les hypothèses précises sont assez mal connues et dans la question suivante, trop peu nombreux sont ceux qui pensent à remplacer t par $\frac{\pi}{2}$.

La question 3d qui utilisait la formule de Parseval a été un peu mieux réussie.

Par contre, dans la question 4a, très rares sont les candidats qui parviennent à montrer l'intégrabilité de la fonction $t \to e^{-xt} f(t)$ sur $[0,+\infty[$. Dans la majorité des copies, on ignore purement et simplement la fonction f en évoquant l'intégrabilité de $t \to e^{-xt}$ sur $[0,+\infty[$.

Dans d'autres copies, on déclare que la fonction $t \to e^{-xt} f(t)$ est continue ou continue par morceaux donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

La question 4b a rarement été bien traitée car très peu de candidats parviennent à remplacer $f(t)$ par $(-1)^k$ dans l'intervalle $]k\pi,(k+1)\pi[$. On a également vu un grand nombre d'intégrations par parties pour le calcul de l'intégrale proposée, ce qui est évidemment hors de propos.

Exercice 2

La première question montre que peu de candidats connaissent la définition d'une fonction décroissante sur un intervalle.

La question 2a, plus difficile, a rarement été abordée.

Par contre, dans la question 2b, nombreux sont les candidats qui utilisent l'inégalité obtenue au 2a pour en déduire $\left|f'(x_0)\right| \leq .....$, ce qui est évidemment incorrect.

La question 3 a été mieux réussie dans l'ensemble, au moins en ce qui concerne l'encadrement.

Par contre, cette question révèle que de nombreux candidats ont des idées confuses sur la notion d'équivalent. De l'inégalité $\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$ et de l'équivalent $\frac{e-1}{x+1} \underset{}{\overset{+\infty}{\sim}} \frac{e-1}{x}$, on ne peut évidemment en déduire que $\frac{e-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$!

Dans la question 4a, quelques candidats se souviennent de l'inégalité des accroissements finis, mais bien peu sont capables de la mettre en œuvre sur un exemple précis.

En ce qui concerne la question 4b, beaucoup de candidats encadrent $g(x)$ entre deux expressions qui dépendent encore de x et en déduisent que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Enfin, dans la question 5b, il est regrettable que si peu de candidats reconnaissent en u_n et v_n des approximations de l'intégrale à calculer par la méthode des rectangles.

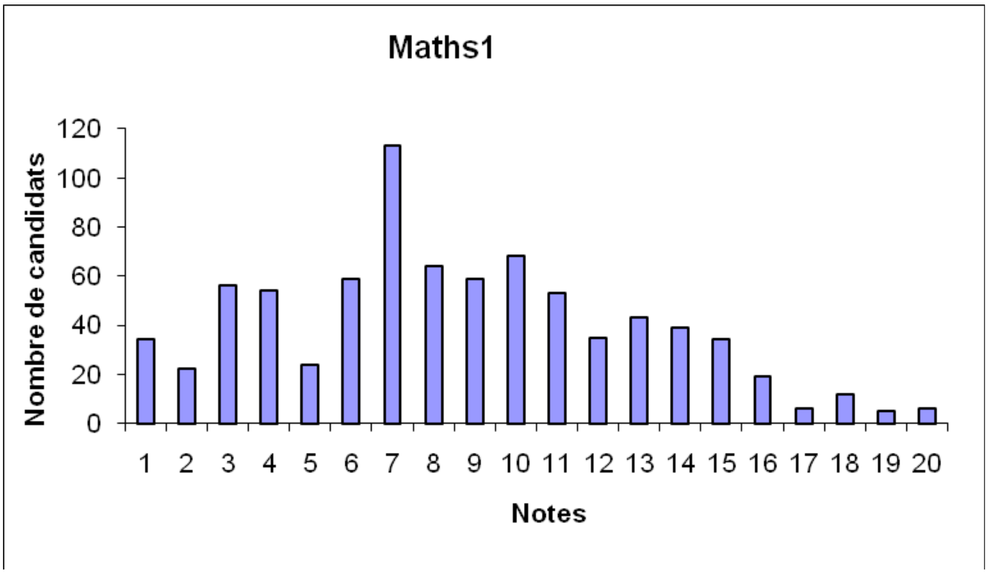
On demandait d'ailleurs à la question 5e une approximation numérique de l'intégrale obtenue grâce à la calculette, mais même parmi ceux qui abordent cette question, beaucoup s'en tiennent à des considérations théoriques, négligeant la recherche effective d'une valeur décimale approchée.

<u>Exercice 3</u>

La première question de cet exercice est abordée par la grande majorité des candidats avec plus ou moins de réussite car l'utilisation du théorème de d'Alembert exige un vocabulaire très précis.
On notera en particulier l'absence fréquente du module, qui conduit certains candidats à trouver un rayon de convergence négatif un peu plus loin (question 5c).
A la question 2, l'expression de $f(x)$ est souvent fausse car beaucoup n'ont pas tenu compte du fait que les sommes sont indexées à partir de $n = 1$, ce qui était pourtant mis en exergue dans le sujet.
La question 3a a été mieux réussie, toutefois, certains candidats espèrent prouver la croissance de g sur l'intervalle $[0,1[$ en comparant $g(x)$ et $g(x+1)$, ce qui est à double titre hors de propos ici.
La question 3c est également très souvent traitée, mais la tangente à l'origine est pratiquement toujours inexacte.
Dans la question 4a, on attendait trois arguments pour l'existence et l'unicité du réel α.
Si la stricte monotonie est très souvent mentionnée, la continuité de la fonction g, pourtant indispensable ici, n'a presque jamais été rappelée.
Les questions 4b et 4c sont généralement traitées avec plus de réussite.
Enfin, dans la question 5b, si le critère spécial relatif aux séries alternées est souvent connu, sa mise en application dans cet exemple précis se révèle difficile, un grand nombre de candidats n'hésitant pas à utiliser des différences d'équivalents pour parvenir au résultat.

<u>Conclusion</u>

Pour conclure, je dirai que nous souhaiterions voir dans les prochaines sessions des candidats capables d'utiliser des concepts simples dans des situations variées.
Certes, les deux années de préparation sont difficiles et le volume de connaissances à acquérir en si peu de temps est considérable, nous en sommes conscients. Toutefois, on souhaiterait tout de même de la part des candidats un minimum de recul sur les notions étudiées.
Aller affirmer comme dans un grand nombre de copies qu'il suffit que l'on ait $h(0) \leq h(1)$ pour en déduire que la fonction h est croissante sur $[0,1]$ montre que l'on n'a pas vraiment réfléchi à la notion de fonction croissante sur un intervalle.
Les examinateurs n'attendent pas des candidats une maîtrise parfaite d'outils difficiles mais ils espèrent que le fait de côtoyer des concepts relativement ardus ne leur a pas fait perdre un minimum de bon sens.
C'est pourquoi nous prodiguerons aux futurs candidats les mêmes conseils que ceux qui leur sont adressés par leurs enseignants tout au long de l'année : étudier le cours régulièrement, s'assurer que les nouvelles notions sont bien comprises à l'aide de nombreux exemples et contre exemples, et essayer de prendre un peu de recul face à une situation nouvelle tout en gardant un minimum de bon sens.


Maths1
Nombre de candidats
120
100
80
60
40
20
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Notes