EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES 2
par Jean-Pierre ETIENNE

Ce problème s'est révélé suffisamment court et facile pour que l'ensemble des questions soit traité par d'excellents candidats et qu'ainsi, le spectre des notes possibles ait été balayé. Les connaissances testées étaient sans surprise par rapport aux épreuves des années précédentes, les seules absences notables du programme d'analyse étant les séries entières et les équations différentielles.

Les copies ont été, en général, mieux présentées que les années précédentes avec peu de fautes d'orthographe dû, entre autre, à la pauvreté du vocabulaire utilisé. L'écriture mathématique est moins satisfaisante, souvent approximative et confuse ; par exemple, une fonction ou une suite est confondue avec la valeur de celle-ci.
Nous recommandons aux candidats de ne pas écrire trop petit, surtout les calculs, et de bien distinguer les variables n et x. La rédaction de questions bien que maîtrisées techniquement est souvent incomplète, ce qui occasionne des pertes de points facilement évitables ; il ne faut pas confondre vitesse et précipitation.

La partie III a été bien mieux traitée que les autres parties (en particulier la partie II).

Le but du problème était de montrer que :

$$sh(x) = x\prod_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}) \text{ et } \int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{x^2+n^2x^2} = \frac{1}{2}(\frac{ch(x)}{x}-\frac{1}{x}),\ \forall x \in \mathbb{R}(\mathbb{R}^*).$$

PARTIE I

1.1 Une minorité confond suite et série. L'énoncé utilisait pourtant la notation officielle du programme pour désigner une série. L'emploi de néologismes même pédagogiques semble dangereux ; nous conseillons aux candidats de les définir préalablement avec précision, par exemple : $\underset{+\infty}{\sim}$ est écrit $\underset{+\infty}{=}$ ou, dans la partie III, apparaît le terme très poétique de « chapeau » pour désigner une fonction dominante dans les théorèmes de convergence dominée.
Beaucoup d'erreurs portent sur les équivalents souvent confondus avec des O et des inégalités écrites sans valeurs absolues qui ne prouvent rien, la variable étant considérée comme positive, ou des emplois du critère de D'Alembert (le plus souvent inexact). On voit même des candidats qui mélangent les variables n et x ou : $u_n(x)$ tend vers 0 donc $\sum u_n(x)$ converge.

1.2 Beaucoup de candidats affirment que $\|u_n\|_{\infty,-a,a} = u_n(a)$ en se trompant sur la manipulation des inégalités. Une minorité montre à la fois la validité à partir d'un certain rang à l'aide des variations de u_n et la non convergence normale de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}$. On peut regretter qu'il y ait très peu de solutions à cette non convergence en se passant de $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$, par exemple en considérant $u_n(n)$, ce qui montre, comme dans d'autres questions, une tendance à appliquer des méthodes plutôt qu'à réfléchir. On retrouve les erreurs de 1.1, des calculs faux de u_n', l'affirmation que u_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ et celle partagée par une large majorité des candidats concernant la convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}$, implique la convergence normale sur $\mathbb{R}$ (on fait tendre a vers $+\infty$!).

1.3 La continuité de u_n est rarement justifiée, même succinctement. On trouve : "toute somme finie ou infinie de fonctions continues est continue". Le théorème est assez bien connu même si le passage des intervalles $-a, a$ à n'importe quel segment de $\mathbb{R}$ n'est pas toujours clairement exprimé.

2.1 La rédaction est souvent incomplète. On voit : $\int_0^x u_n(x)dx$! Certains pensent que le théorème « fondamental » s'applique aux fonctions C^0 par morceaux. On retrouve une erreur du même type en partie II avec le caractère C^1 des fonctions considérées, par exemple pour les intégrations par parties.

2.2 Ceux qui utilisent des $\sim$ oublient souvent de mentionner la constance des signes et ceux qui travaillent avec des inégalités les valeurs absolues.

2.3 Les candidats disposaient de trois théorèmes pour résoudre cette question. On pouvait utiliser le théorème d'inversion $\sum \int$ à condition de l'appliquer sur le bon intervalle $0, x$ et de bien gérer le signe de x ; peu de candidats l'ont utilisé, les candidats se placent soit sur $\mathbb{R}$, soit sur un intervalle non précisé ; certains affirment que u_n est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ceux qui ont appliqué les théorèmes classiques de dérivation ou d'intégration sous le signe $\sum$ en se servant de la convergence normale sur $0, x$ ont souvent abouti en oubliant parfois de mentionner dans le premier cas que $V(0)$ est effectivement égal à 0.

3 A nouveau, x est considéré comme positif, même strictement, puisqu'une majorité écrit $\ln(x)$sans se poser de question sur x. Cette question pourtant facile n'a pas donné lieu à de développements par manque de rigueur. L'énorme erreur a consisté à « montrer » que $p_n(x)$ tend vers $x \cdot 1$ puis tend vers $x \exp(V(x))$!
On voit aussi : $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$ donc p_n a une limite et même : $\exp(a+b) = \exp(a) + \exp(b)$.

PARTIE II

1.1 C'est la partie la plus mal traitée du problème. Compte tenu de la longueur et de la facilité de celui-ci, on exigeait une démonstration rigoureuse de la continuité et du caractère C^1 par morceaux de g_x et non une simple explication graphique. Très peu y sont parvenus même partiellement. Une erreur fréquente consiste à écrire que la continuité est équivalente à la périodicité.
Le théorème de convergence normale est souvent mal connu : oubli de l'hypothèse de continuité ou de celle du caractère C^1 par morceaux. La convergence simple est confondue avec la convergence en moyenne quadratique. On voit même : "la fonction a une série de Fourier donc lui est égale". Par rapport aux années précédentes, les séries de Fourier semblent moins bien maîtrisées.

1.2 Certains font un long calcul pour trouver $b_n = 0$ en terminant par écrire qu'il était inutile !

1.3 Le calcul de $a_n(x)$ est assez bien traité dans le cas $x \neq 0$ contrairement à celui de $a_n(0)$ où le cas $n = 0$ n'est pas distingué. Les candidats ne se rendent pas compte qu'en appliquant 1.1, ils démontrent alors que $0 = 1$. Très peu observent d'emblée la relation entre $a_n(x)$ et $u_n(x)$.

2.1 Cette question a été assez fréquemment résolue mais avec, comme en 1.1, quelques confusions entre $g_x(t)$ et $ch(\frac{xt}{\pi})$ en dehors de $-\pi,\pi$ et le rôle de l'hypothèse $x \neq 0$ n'est pas bien mis en exergue.

2.2 Ici, comme en 2.3, la séparation des cas $x = 0$ et $x \neq 0$ est souvent omise. Il était pratique dans cette question de séparer aussi les cas $x < 0$ et $x > 0$. Les intégrales de $\frac{1}{t}$ ou de $\frac{1}{sh(t)}$ sur $0, x$ sont courantes. Cette question n'a pas été bien traitée.

2.3 Cette question simple a été négligée pour la même raison que précédemment.

PARTIE III

1.1 Une erreur fréquente est de croire que $\exp(\pi t) \sim \pi t + 1$ en 0^+ permet de répondre à la question.

1.2 L'intégrabilité locale par continuité sur $0, +\infty$ de la fonction intégrée est souvent oubliée. L'erreur $\frac{1}{\exp(\pi t) - 1} \leq \frac{1}{\exp(\pi t)}$ est courante. Encore trop d'étudiants affirment que le fait d'avoir une limite nulle en $+\infty$ implique l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$ ou que le produit de fonctions intégrables est intégrable ou que la seule continuité implique l'intégrabilité sur $0, +\infty$. On voit aussi : $|\sin(tx)| = 1$; $|h(t,x)| \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\exp(\pi t) - 1}$ et l'oubli de la constance des signes dans le cas d'équivalents. Ces erreurs se retrouvent dans les questions suivantes.

2.1 On constate des confusions entre les variables t et x, certains considérant des dérivées par rapport à t, voire même ces seules dérivées. Très peu de candidats développent entièrement en utilisant le raisonnement par récurrence ou ne le mentionnant même pas.

2.2 On retrouve toutes les erreurs vues en 1.2 plus celles dues à la multiplication par t^n, par exemple : $t^n \exp(-\pi t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \exp(-\pi t)$. Certains confondent les arguments de 2.2 avec ceux de la question qui suit.

3 Les théorèmes d'extension aux cas C^n et C^∞ sont rarement énoncés et (ou) appliqués de manière claire. En particulier, « $\forall n$ » est souvent oublié ou mal placé. On rencontre encore des copies affirmant que h étant C^∞, il en est de même pour f. La domination par la fonction $\frac{1}{\exp(\pi t) - 1}$ non intégrable sur $0, +\infty$, par $t^n \exp(-\pi t)$ ou une fonction dépendant de x sont des erreurs fréquentes.

4.1 On constate quelques oublis de : $t > 0 \Rightarrow |\exp(-\pi t)| < 1$ pour utiliser la série géométrique.

4.2 Cette question est souvent résolue avec parfois l'omission ou la mauvaise rédaction du passage à la limite : $\lim_{A \to \infty} \int_0^A \exp(-n\pi t)\sin(tx)dt$. Quelques erreurs de signe aboutissent à $-\frac{1}{2} u_n(x)$.

4.3 A partir de l'expression de h_n sans $\sum$, les candidats avaient trois manières de démontrer $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x,t)dt$. La plus utilisée a été d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $t \mapsto h_n(x,t)$. Très peu de candidats ont abouti pour cause de domination erronée : soit $\dfrac{1-\exp(-n\pi t)}{\exp(\pi t)-1}$ qui montrait la méconnaissance du théorème, soit $\dfrac{1}{\exp(\pi t)-1}$ non intégrable sur $0,+\infty$ ou un peu mieux $h(x,t)$. Le dominant correct $|h(x,t)|$ s'est vu rarement.
La deuxième méthode était d'appliquer le théorème d'inversion $\sum \int$ à $t \mapsto \exp(-n\pi t)\sin(tx)$ ce qui était possible en utilisant $|\sin(tx)| \leq t|x|$ (à démontrer) et en revenant ensuite aux fonctions h_n. Les tentatives ont généralement échoué par escamotage des valeurs absolues ou par majoration de $|\sin(tx)|$ par 1. Beaucoup ont pratiqué successivement et sans succès ces deux méthodes !
La troisième solution, la plus simple, consistait à constater que la fonction continue $t \mapsto h(x,t)$ prolongée par continuité en 0 et qui tend vers 0 en $+\infty$ est bornée sur $0,+\infty$ et à en déduire que : $\left| \int_0^{+\infty} \dfrac{\exp(-n\pi t)\sin(tx)}{\exp(\pi t - 1)} dt \right| = O(\dfrac{1}{n})$ tend donc vers 0. Il semble qu'aucun candidat n'ait proposé cette solution, ce que l'on peut regretter. Curieusement, sans doute la pression de la fin de l'épreuve, peu d'étudiants ont su exploiter $f(x)$ établi comme limite pour le calculer en fonction de $U(x)$.

Remarques générales :

Les copies ont été d'un niveau comparable aux années précédentes avec une baisse dans le traitement des séries de Fourier et une légère amélioration dans le reste.

Les points techniques posant problème sont toujours les mêmes, largement évoqués ci-dessus.
Un progrès a été constaté au niveau de la présentation et à un moindre degré la rédaction.

Le manque de rigueur est particulièrement prononcé dans les raisonnements par disjonction de cas et dans l'application des théorèmes classiques dont les hypothèses peuvent être floues ou vérifiées sans soin.

Beaucoup de candidats reproduisent des schémas scolaires souvent maîtrisés de manière approximative au détriment de la réflexion.

Ce problème a été conçu par notre regretté collègue Pierre MARRY ; nous profitons de ce rapport pour lui rendre hommage.