ALGÈBRE

Rapporteur Monsieur Edouard LUCAS

Le sujet était composé d'un exercice de géométrie plane et d'un problème dont le thème était les matrices stochastiques. On y utilisait à la fois des notions de première année (système, géométrie du plan, équation réduite d'une hyperbole, algèbre linéaire, calcul matriciel, projecteur, suite géométrique) et de seconde année (réduction des matrices carrées, réduction d'une conique dans un repère orthonormé, plan euclidien).

Remarques générales

Nous notons avec satisfaction que la présentation des copies est bonne et il est très rare d'avoir à sanctionner une copie mal présentée. Nous rappelons que la clarté ou qu'une bonne présentation est valorisée lors de la notation.

Une majorité de candidats a abordé toutes les parties du problème. Cependant l'exercice n'a été abordé que par un cinquième des candidats.

Les candidats savent utiliser leur calculatrice, toutefois un minimum de rédaction pour expliquer la démarche reste nécessaire. On ne peut se satisfaire d'un style télégraphique.

Trop de candidats semblent penser qu'à une valeur propre simple est associée un seul et unique vecteur propre, alors qu'on en a une infinité. Parfois cela relève simplement d'une mauvaise rédaction, la structure d'espace vectoriel des sous-espaces propres ayant été comprise, mais parfois cela aboutit, en question **B13**, au « raisonnement » suivant : "T est le vecteur propre associé à 1 donc c'est L".

Un nombre n'est pas nécessairement non nul, il faut donc éviter de pratiquer des divisions par a ou 1-a (**B6** ou **C6**).

Pour vérifier qu'une colonne est stochastique, il y a deux choses à vérifier : une égalité et des inégalités ; certains semblent l'oublier (**A2**, **A13**, **B12**…).

Exercice

1. La plupart des candidats cherchent les valeurs propres de la matrice symétrique sans préciser qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres.
2. L'excentricité a rarement été trouvée.
3. Il est étonnant que cette question ne soit pas toujours bien traitée. Il fallait reconnaître le cercle de centre O et de rayon 1.
6. Il est étonnant de voir la formule de dédoublement des termes (dont on peut toujours se passer) pour le calcul des équations des tangentes aux sommets.

Partie A

3. La question d'informatique a rarement été bien abordée et lorsqu'elle l'a été, elle a été mal traitée, si ce n'est par une petite minorité de candidats.

5. Il n'était pas nécessaire de rechercher les valeurs propres. Il est donc conseillé aux futurs candidats de bien lire l'énoncé pour comprendre ce qui est demandé afin d'éviter des calculs superflus.
6(a) Majoritairement fait en effectuant un développement complet des déterminants.
6(b) Il ne suffit pas que le polynôme caractéristique soit scindé pour que la matrice soit diagonalisable. Très rares sont les candidats qui évoquent le caractère trigonalisable des matrices complexes.
7. Pas toujours bien traitée. Nous rappelons que « déduire » signifie que la question doit être résolue en utilisant les réponses précédentes.
9. Certains candidats utilisent la comatrice (qui ne figure pas au programme TSI) alors que l'on ne demandait que l'inverse. Il est dommage que ce calcul aboutisse à un résultat faux. La trace de la comatrice a même été utilisée pour le polynôme caractéristique, ce qui ne semble pas pertinent.
10. La rédaction des récurrences pose problème. Beaucoup de candidats partent de ce qu'il faut démontrer i.e. partent du rang n+1 (remarque valable pour **A10**, **B2**, **B10** et **C4**). On rappelle qu'une récurrence doit comporter l'initialisation (au rang 0 si la propriété porte sur tous les entiers naturels) et l'étape dite d' « hérédité » ou « transmission ». Bien faire apparaitre l'hypothèse de récurrence.
Curieusement, c'est surtout l'initialisation qui pose problème.
12. Des candidats parlent de convergence de suites matricielles, ce qui n'est pas au programme. Il faut travailler coordonnée par coordonnée et éviter les suites géométriques de matrices. Cette remarque est aussi valable pour **A13**, **B11**, **B12** et **B13.** De plus, certains veulent à tout prix montrer la convergence des suites avec le théorème ayant pour hypothèse : suite croissante, majorée (ou décroissante minorée) alors qu'il s'agissait de suites géométriques, ceci est valable pour **B11**.

Partie B

Certains candidats se contentent de traiter uniquement quelques cas particuliers, suivant les questions.

1. La grande majorité des candidats ne répond pas à la question posée, ne se rendant pas compte qu'ils traitent en fait la réciproque (remarque valable pour **C2**).
3. 4. 5. La manipulation des inégalités avec somme et différence pose problème au plus grand nombre. De plus, il fallait veiller à la distinction entre inégalités larges et inégalités strictes, ce qui n'a pas toujours été le cas.

Partie C

1. Peu de candidats évoquent la non nullité de la matrice.

3. L'autorisation de l'usage de la calculette n'est pas une raison pour ne pas rédiger un minimum. Trop de candidats se sont contentés d'écrire $A^2=(A)*(A)=(A)=A$ ce qui n'a aucun intérêt étant donné que la réponse est dans la question.

5. Bien traitée en général.

6. L'équation du noyau a été mieux traitée que celle de l'image alors que pour un projecteur p l'image est le noyau de p-IdE.

Conclusion

On notera que les calculs demandés étaient assez simples, d'autant plus que la calculatrice était autorisée, mais qu'on attendait des candidats des justifications claires et précises.
Nous espérons que les futurs candidats feront aussi bien que ceux de cette année concernant les techniques habituelles (inverse de matrice, valeurs propres et espaces propres de matrice, réduction de conique, géométrie) et qu'ils feront preuve de davantage de rigueur à la fois lors de l'apprentissage des concepts et des théorèmes du cours — de première comme de seconde année — et dans la rédaction de leurs argumentations.