Rapport sur l'épreuve de mathématiques 2

L'épreuve portait sur l'étude de la moyenne des itérés d'un endomorphisme d'un espace vectoriel et sur la limite de la suite de ces moyennes sous diverses hypothèses : endomorphisme isométrique ou contraction linéaire (endomorphisme qui diminue la norme) d'un espace vectoriel normé ou d'un espace euclidien. On rencontre ce problème dans la littérature mathématique sous le nom de théorème ergodique.

Le début du problème comprenait de nombreuses questions élémentaires et classiques, déstinées à faire un bilan des connaissances des candidats. On rappelle que toute question posée dans l'énoncé demande une réponse argumentée. La rédaction des questions simples était souvent délicate à évaluer : la phrase "deux vecteurs (dont on connaît l'expression dans la base canonique) sont clairement libres" n'aide pas le correcteur à savoir si l'étudiant comprend pourquoi ils sont libres , ou plutôt s'il comprend qu'ils *doivent être libres* et fait semblant de le comprendre. Le but d'une épreuve est de montrer que le candidat est capable de faire des mathématiques et il est essentiel que le correcteur comprenne ce que fait l'étudiant.

Dans ce devoir, surtout dans la partie I, plusieurs questions pouvaient se traiter de deux manières; une manière standard et calculatoire, et une manière plus fine et rapide, en suivant la logique de l'énoncé. Bien souvent, les candidats choisissent la première méthode, ce qui les conduit à être pris par le temps dans la suite du problème. C'est un fait patent que trop d'étudiants ne prêtent aucune attention à la logique et à l'agencement de l'énoncé. Ils traitent chaque question comme un exercice indépendant et c'est fort dommage. Ce manque de prise de recul les pénalise sur le temps.

On peut noter que la calculatrice est sous-utilisée (un long calcul pour obtenir un polynôme caractéristique faux). Toutefois, on remarque avec plaisir que des étudiants n'hésitent pas à justifier un calcul simple par un honnête "résultat obtenu avec la calculette" qui met en confiance le correcteur.

La présentation des copies est globalement satisfaisante; on recommande de faire ressortir les résultats essentiels.

Dans la partie I, on étudie trois exemples particuliers d'un espace vectoriel de dimension 4.

Dans l'exemple I.A, les questions étaient très simples. On souhaitait lire des arguments de démonstration précis, en voici quelques exemples :

"l'endomorphisme s est diagonalisable car sa matrice S est symétrique réelle" (réelle est souvent oublié);

"$S^2 = I_4$ donc le polynôme $X^2 - 1$ annule s et $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$. Comme $S \neq \pm I_4$, ± 1 <u>sont toutes deux</u> valeurs propres de s";

"comme S est diagonalisable, ses sous-espaces propres E_1 et E_{-1} sont supplémentaires. Comme S est une matrice symétrique et que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, E_1 et E_{-1} sont orthogonaux. Donc $E_1^\perp = E_{-1} \ldots$ et une base (u_3, u_4) de $E_1^\perp$ est donc une base de E_{-1}".

Il y a une grande confusion entre les équivalences ou les implications possibles entre les propriétés suivantes: matrice symétrique, matrice orthogonale, matrice d'une symétrie, matrice inversible, matrice diagonalisable, matrice de déterminant $+1$.

L'orthonormalisation d'une famille de deux vecteurs est assez catastrophique: on se contente de les normer, on se trompe parfois dans ce calcul simple, ou bien on utilise une formule apprise par cœur et quelquefois fausse.

L'exemple I.B commençait par un calcul de norme, pour montrer que l'endomorphisme l était une contraction. La remarque du début, concernant les raisonnements qui évitent les calculs fastidieux, s'applique aux questions suivantes de cette partie.

L'exemple I.C était plus difficile et plus long que les précédents, mais le début était simple. rappelons au passage qu'une matrice est orthogonale si ses colonnes sont orthogonales et normées et non l'un sans l'autre.
La question I.C.2 n'était pas difficile mais demandait de la précision. Pour montrer que $\text{Vect}(e_1, \varepsilon_1)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2, il n'est pas nécéssaire de montrer que c'est un sous-espace vectoriel, c'est une définition! Pour montrer que la famille (e_1, ε_1) en est une base, il suffit d'écrire qu'elle est libre car les vecteurs sont non nuls et non proportionnels (pour deux vecteurs de $\mathbf{R}^4$ cela se voit).

Quelques étudiants ont voulu utiliser la stabilté de F_1 pour en déduire celle de F_2, en utilisant le produit scalaire et les endomorphismes t et t^*. Hélas, la matrice ${}^tT$ de t^* n'est pas $-T$ car T n'est pas vraiment antisymétrique, les coefficients diagonaux n'étant pas nuls.

Pour obtenir la matrice T' de la question I.C.3, la formule du changement de base avec la matrice de passage restait possible, mais très calculatoire; beaucoup plus simplement, il suffisait de connaître les transformés des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ par leurs composantes dans cette base, ce que l'on avait calculé dans la question précédente. Parmi les étudiants qui ont obtenu la matrice T', un assez grand nombre l'expriment en fonction de θ mais certains ne reconnaissent pas $\cos\theta$. Curieusement certains se trompent sur les angles des rotations qu'elle fait apparaître

la question I.C.4, qui était technique et assez banale, et qui servait dans la dernière question de cette partie, est très mal traitée. Parmi les hypothèses formulées par les candidats, on peut lire $|e^{i\omega}| < 1$, ou pire encore, sans le module!

Enfin, la question I.C.5 a été bien comprise par ceux qui ont traité correctement les questions précédentes.

La partie II était théorique et plus difficile que la précédente, mais plus courte. On étudiait la moyenne des itérés d'un endomorphisme sous différentes hypothèses. La limite de cette moyenne était obtenue à l'aide d'une décomposition de l'espace vectoriel en deux sous-espaces supplémentaires. On faisait établir cette décomposition dans trois contextes différents.

Par manque de temps, un assez grand nombre d'étudiants n'ont pas ou peu abordé cette partie.

Les questions II.A.3, II.C.1 et II.C.2 demandaient des majorations sur les normes et des passages à la limite sur un entier tendant vers l'infini. Les hypothèses, endomorphisme isométrique ou contraction, étaient toutes indiquées pour conduire à ces majorations. Il est surprenant que parmi les étudiants qui ont abordé ces questions, très peu y aient pensé.

Signalons quelques lacunes dans la partie II.B: f et f^* ne commutent pas forcement; l'inégalité $(f^*(x)|x) \leq (x|x)$ n'implique pas $\|f^*(x)\| \leq \|x\|$.

La rédaction de la question II.B.2, qui demandait de montrer qu'une norme (de plus au carré) était négative ou nulle, a surpris certains candidats au point de leur faire écrire qu'il y avait une erreur d'énoncé. Ce n'était qu'une indication devant les conduire à montrer que cette norme était nulle, en utilisant une inégalité (déduite de la propriété de contraction de f^*).

La partie III terminait ce problème en montrant comment une isométrie d'un espace euclidien pouvait se décomposer en composées de reflexions, grace à la propriété de décomposition de l'espace en deux sous-espaces supplémentaires, démontrée dans II.B. il y avait quelques questions faciles auquelles ont répondu un bon nombre de candidats, leur permettant ainsi d'améliorer leur note.

Les copies se partagent en trois types: un groupe de quelques très bonnes copies dont les auteurs font preuve d'une grande maitrise du programme et du temps imparti, un deuxième groupe de copies assez bonnes qui traitent bien le début mais par manque de temps s'arrêtent au niveau de la partie II, enfin des copies qui traitent du probléme de façon très partielle.

En conclusion de ce rapport, nous souhaitons que les étudiants soient attentifs à la rédaction des questions et à leur enchaînement. Les indications qu'ils y trouveront leur permettront de répondre par un raisonnement, plutôt que par un long calcul, gagnant ainsi du temps pour avancer plus loin dans le problème.

Christian Dupuis