Mathématiques I F. GAUTHIER

Dans cette épreuve on se proposait d'étudier quelques propriétés de deux fonctions θ et *f*, définies comme sommes de séries de fonctions. Dans la partie I on calculait des valeurs exactes et une valeur approchée de la fonction θ, la partie II était consacrée à une étude de la fonction *f* en liaison avec $\theta(2)$, enfin dans la partie III on étudiait de façon précise la continuité et le caractère C^1 de la fonction θ. Le sujet permettait de tester les connaissances des candidats dans plusieurs secteurs théoriques de l'analyse, ainsi que dans un secteur pratique (calcul approché de la somme d'une série); il était aussi révélateur du niveau d'assimilation de diverses notions importantes et de l'aisance à utiliser certaines techniques classiques. Les trois parties pouvaient être abordées et elles l'ont été largement, les candidats n'ont d'ailleurs pas hésité à abandonner certaines questions jugées (souvent à tort) trop difficiles, pour proposer des solutions à des questions dans la suite du problème.

Partie I

Dans cette partie on calculait $\theta(1)$ grâce à un procédé élémentaire, puis une valeur approchée de $\theta(3)$ et enfin $\theta(2)$ et $\theta(4)$ avec l'aide des séries de Fourier.

Concernant le calcul de $\theta(1)$ (I1) les correcteurs ont remarqués:

- qu'en dehors des candidats qui écrivent qu'une série converge parce que son terme général tend vers zéro, beaucoup n'ont pas d'idées claires sur le théorème spécial des séries alternées, en particulier sur l'hypothèse concernant la décroissance de la valeur absolue du terme général;

- que si tous les candidats sont persuadés que Jn tend vers zéro, assez peu fournissent une preuve valable de leur affirmation: un argument souvent proposé est celui de la convergence uniforme sur [0;1], voir sur [0;a] avec $0<a<1$;

- que pour le calcul de Jn + Jn+2, il est surprenant de voir autant de difficultés pour trouver une primitive d'une fonction de la forme $[u(x)]^n\, u'(x)$;

- qu'en revanche, les deux questions suivantes sont bien traitées, en particulier l'utilisation (éventuelle) d'une récurrence.

La plupart des candidats n'abordent pas le calcul approché de $\theta(3)$ (I2) ou bien se contentent de donner, sans commentaire, un résultat numérique dans I2,2. Pour ceux qui proposent quelques éléments de solutions pour décrire un algorithme de calcul dans I2,1 , la notion de boucle ne semble pas très claire. Enfin on trouve rarement un bon argument avec le signe contrôlé pour justifier les termes « par défaut ».

Concernant la partie « série de Fourier » (I3), il faut noter que si les calculs des coefficients de Fourier sont souvent exacts, en revanche de nombreux candidats sont incapables de donner les hypothèses permettant l'application du théorème de Dirichlet. Lorsqu'il faut intégrer termes à termes sur $[0;x]$ en invoquant la convergence uniforme sur ce segment, que d'erreurs, d'imprécisions, des signes d'intégrations sans bornes..., par suite il y a perte de la valeur en zéro, ou de la constante d'intégration, il en résulte parfois des valeurs nulles pour $\theta(2)$ ou $\theta(4)$ sans que cela amène d'inquiétude.

Partie II

Cette partie, consacrée à la fonction *f*, a permis de se rendre compte que la notion de convergence d'une série numérique pose souvent plus de problème que le convergence d'une intégrale. Il arrive qu'un étudiant sache fournir un bon argument pour la convergence normale de la série sur $[a;+\infty[$ ce qui donne la continuité de *f* dans II2, alors que dans II1 les arguments de la convergence de la série numérique sont faux, mais qu'à nouveau la justification de la convergence de l'intégrale dans II6.1 soit correcte. De nombreux candidats parlent de convergence normale ou uniforme sans préciser sur quel ensemble et beaucoup écrivent que la convergence normale sur tout segment de $]0;+\infty[$ entraîne la convergence normale sur $]0;+\infty[$. La comparaison entre série et intégrale est bien traitée dans II6,2 en revanche dans II6,3 la justification de l'échange série-intégrale est très rare: être au bord du disque de convergence d'une série entière ne semble poser aucun problème!!

Partie III

Dès le départ pour obtenir un encadrement de $\theta(x)$, la différence est marquée entre les candidats qui reviennent clairement à la décroissance de la valeur absolue du terme général et à l'encadrement par deux sommes partielles, et ceux qui se contentent d'affirmations sans arguments. Trouver (avec preuve) un minorant pour θ ne semble pas chose facile (pour certains $1-\frac{1}{2}x$ est un minorant).

La continuité de θ est prouvée correctement dans les bonnes copies, au moins sur $]1;+\infty[$ .Les dernières questions étaient plus ardues et seuls quelques brillants candidats s'y sont essayés avec un certain succès. Une question préparatoire (III4,1) était néanmoins très facile et les candidats ont largement abordé l'étude de φ et curieusement ils ont assez souvent inversé les résultats.

Nous souhaiterions que grâce à un peu de réflexion devant le sujet et du raisonnement les candidats exploitent mieux les connaissances dont beaucoup ne manquent pas.