Observations générales

Le problème proposait d'étudier des matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Il couvrait une bonne partie du programme d'algèbre linéaire et d'algèbre bilinéaire avec une pincée de topologie. Il demandait aux candidats de réaliser un algorithme en français et de le rentrer dans la calculatrice pour tester des matrices. Toutefois le candidat peu à l'aise avec l'algorithmique pouvait répondre à la question, les matrices à tester ayant beaucoup de zéros.

L'énoncé qui se composait de 27 questions ou sous questions semblait relativement court. Une grande partie des candidats pouvait alors traiter presque tout le sujet dans le temps imparti mais on notera que peu d'étudiants obtiennent la note maximale. En effet le texte proposait des recherches d'exemples qui demandait une certaine initiative et qui ont pu bloquer des candidats.

Les candidats étaient guidés et les questions posées, claires et détaillées, nécessitaient des réponses souvent courtes. De nombreuses questions étaient de simples applications du cours. Le texte a été très bien compris des candidats.

Remarques détaillées par question

I. Exemples

1. Erreur trop fréquente : « *Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristiques est scindé à racines simples* ».
2. Erreur très fréquente : « $-X^3 - X = -X(X^2 - 1)$ ».
3. La preuve pour établir que ε_2 est fermée, pourtant facile, n'a pas été souvent traitée. Une façon élégante de répondre était de considérer ε_2 comme union de 2 sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$ (fermés car en dimension finie).

II. Test dans le cas $n = 3$

4. La CNS se limite trop souvent à $\det A \neq 0$.
5. Souvent un seul sens est montré. Question parfois faite de manière trop calculatoire !
6. Question qui a fait fuir certains alors que la réponse était quasiment fournie à la question précédente. Le candidat peu à l'aise avec sa calculette pouvait s'en sortir « à la main ». Conjecture assez souvent exacte.

III. Exemples de matrices par blocs

7. Question de cours en général réussie. Toutefois il était utile de détailler que $\det\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det C$.
8. La question (a) a été mieux traitée que la question (b).

Voici des exemples de bonnes réponses :

(a) La matrice A est la matrice A_5 de la question 6, C est une matrice de taille 1×1 non nulle et B ne contient aucun 0.

Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice à diagonale propre de $M_4(\mathbb{R})$.

(b) La matrice B ne contient aucun 0 et les matrices A et C sont telles que les éléments diagonaux de l'une soit les valeurs propres de l'autre et vice versa.

Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice à diagonale propre de $M_4(\mathbb{R})$.

IV. Quelques propriétés

9. On rencontre l'erreur : « $\det(aA) = a\det(A)$ ». On oubli souvent le cas $a = 0$. Question pas toujours bien rédigée.
10. Question peu traitée en général.
11. (a) trop peu de candidats proposent un contre-exemple pour cette question (a).
    On voit une confusion entre matrice triangulaire et matrice trigonalisable.
12. Question assez bien traitée même si on trouve quelques « oui » à la question sous-espace vectoriel ?

V. Matrices symétriques et matrices antisymétriques

13. Question plutôt bien traitée.
14. On pense à diagonaliser la matrice mais pas toujours à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.
15. On voit trop souvent « $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$ ».

VI. Dimension maximale

16. Réponse parfois fausse, on trouve même n^2.
17. La formule de Grassman est souvent connue et bien utilisée.
    On trouve parfois l'erreur « $\dim M_n(\mathbb{R}) = n$ ».
18. Quelques résultats corrects dans les meilleures copies.

La moyenne est de 11,51 et l'écart type de 3,82.