MATHEMATIQUES

Rapporteur Monsieur Rémi COUTENS

Déroulement de l'épreuve

Le protocole n'a pas changé et sera le même pour la session 2008, rappelons donc aux futurs candidats les principaux points :

L'oral de mathématiques dure une heure (une demi-heure de préparation, une demi-heure d'exposé).

Chaque sujet est composé de deux exercices indépendants (l'un orienté algèbre-géométrie, l'autre analyse-géométrie) de durées sensiblement égales. On trouvera en annexe de ce rapport quatre exemples de planches proposées en 2007.

La calculatrice est autorisée pour une majorité des sujets proposés. Elle est utilisée comme outil de calcul (valeurs approchées, petits calculs matriciels) mais jamais comme outil de programmation. Insistons : les candidats doivent se munir de leur calculatrice lors de l'oral et savoir s'en servir à bon escient.

Après la préparation, le candidat expose les résultats qu'il a obtenus. Même si certains d'entre eux sont incomplets, le candidat doit expliquer les pistes (même infructueuses) qu'il a explorées, les théorèmes du cours auxquels il a pensé etc.

Lorsque l'examinateur intervient ce n'est jamais dans le but de déstabiliser le candidat mais au contraire pour lui permettre de montrer ses connaissances, son savoir-faire. Il importe donc que le candidat soit à l'écoute des indications fournies et qu'il sache alors reprendre l'initiative.

Sur la session 2007

Du point de vue de la forme, l'ensemble des exposés est très satisfaisant. La quasi-totalité des candidats expose clairement ses résultats et ses démarches. Il va de soi qu'un candidat qui marmonne ou ne parle qu'au tableau est sanctionné.

Sur le fond, le niveau des candidats est plutôt satisfaisant : les principaux outils et techniques sont acquis (calcul de valeurs propres, diagonalisation, calcul des coefficients de Fourier...).

Parmi les points du programme semblant poser le plus de difficultés citons les nombres complexes, la formule de Parseval, la convergence des séries (idem pour les intégrales). La plus grande surprise a été la méconnaissance parfois totale des résultats concernant l'étude des suites vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (équation caractéristique, expression du terme général).

Conseils aux futurs candidats

Évidemment la prestation orale a une grande importance, veillez à bien annoncer préalablement les différentes étapes de vos calculs et à n'écrire que les résultats intermédiaires qui vous semblent importants. Si l'examinateur souhaite voir un détail, il vous le demandera.

Le jury apprécie particulièrement la rigueur et la précision.

Par exemple:

- ne dites pas simplement « la fonction est continue sur l'intervalle zéro-un » mais précisez si les bornes font ou non partie de l'intervalle ;
- ne dites pas simplement « c'est une série de Riemann convergente car alpha est supérieur à un » mais précisez ***strictement*** supérieur à un ;
- lors de l'utilisation d'un **critère de comparaison** (pour les séries ou les intégrales) le terme général doit être **positif** : dites-le et vérifiez-le !
- ne confondez pas les notions (par exemple celle de rayon de convergence) et les moyens de calcul (par exemple la règle de D'Alembert qui d'ailleurs est rarement convenablement employée).

Pensez aussi à faire des **figures,** non seulement en géométrie mais aussi pour les fonctions périodiques, pour l'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ etc.

Le jury aura du mal à être indulgent si vous connaissez mal, par exemple, les points suivants :

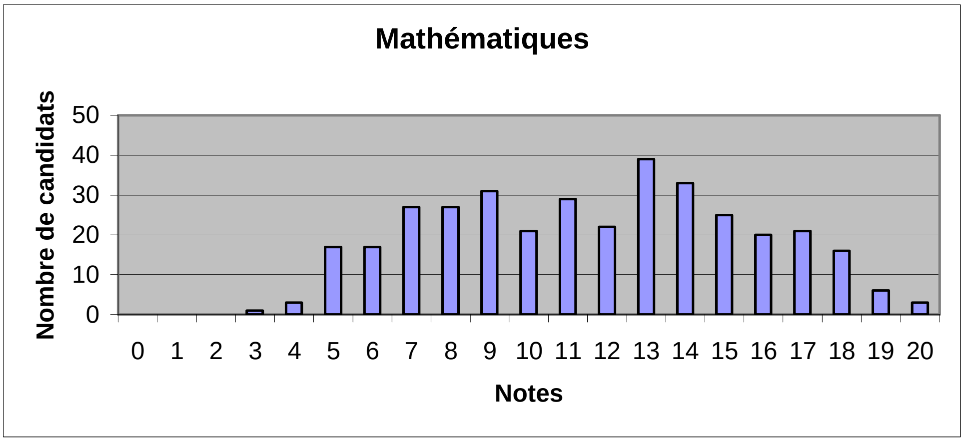
- la tangente en un point d'une courbe paramétrée (y compris équation polaire) ;
- le gradient et ses diverses utilisations (étude d'extremum local, de ligne de niveau) ;
- les équations classiques en géométrie : équation réduite des coniques, y compris celle d'un cercle (!), équation d'une droite du plan ou d'un plan de l'espace ;
- la nature des séries de Riemann (idem pour les intégrales) ;
- les développements en série entière incontournables : 1/(1-x) etc. ;
- les résultats concernant les séries de Fourier ;
- la forme d'une solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre un ou d'ordre deux (à coefficients constants ou non mais sans confondre les méthodes !).

Révisez aussi le programme de première année : les polynômes, les fonctions usuelles (graphe et dérivée d'Arctan ...).

Lors de la préparation, lisez bien les énoncés en entier et prenez le temps de réfléchir aux deux exercices.

Conclusion

Le jury tient à féliciter la plus grande partie des candidats pour leur sérieux et le travail qu'ils ont manifestement effectué ces dernières années. Certains d'entre eux ont vraiment réalisé une prestation remarquable. Il souhaite une excellente préparation et bon courage aux futurs candidats.


Mathématiques
Nombre de candidats
50
40
30
20
10
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Notes

Exemple 1 (*Calculatrices autorisées*)

Exercice 1

$\mathbf{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle, $(\ |\ )$ désigne le produit scalaire et $\wedge$ le produit vectoriel. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire (c'est-à-dire de norme 1) de $\mathbf{R}^3$ et f l'application définie par

$$\text{Pour tout } \vec{x} \in \mathbf{R}^3, \quad f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(\vec{x} + (\vec{x} \mid \vec{u})\,\vec{u} + \sqrt{3}\,\vec{u} \wedge \vec{x}\right)$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
2. Justifier qu'on peut compléter $\vec{u}$ en $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$.
3. Préciser la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et reconnaître f.
4. On suppose que $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.
   Préciser la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 2

Soit α un réel strictement supérieur à 1 . Pour n entier supérieur (ou égal) à 2, on pose

$$u_n = \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - 2\frac{1}{n^\alpha}$$

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.
3. Pour $n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}\right)$ et en déduire :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}$$

4. Donner un équivalent simple de $S - S_n$ quand n tend vers l'infini
   on pourra factoriser par $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

Exemple 2 (*Calculatrices autorisées*)

Exercice 1

1. Prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.
2. Calculer le rayon de convergence R et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ pour $x \in]-R, R[$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Exercice 2

On se place dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé.
Pour quelles valeurs du réel a la surface d'équation $ax^2 + ay^2 + az^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 1$ est-elle un ellipsoïde ?

Exemple 3 (*Calculatrices interdites*)

Exercice 1

Étudier et tracer la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{\sin^2(t)}{2+\sin(t)} \\ y(t) &= \cos(t) \end{cases}$.

Exercice 2

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= 2x \\ y' &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z \\ z' &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z \end{cases}.$$

Exemple 4 (*Calculatrices interdites*)

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(t) = |\cos t|.$$

1) Montrer que f est paire et π-périodique.
2) Donner la série de Fourier de f.
3) Après en avoir établi l'existence, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}.$$

Exercice 2

1) Montrer que le polynôme $R = X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes sur $\mathbf{C}$. On notera a, b et c, ces trois racines.
2) Montrer que a, b, c, $-a$, $-b$ et $-c$ sont six complexes distincts.
(on pourra commencer par montrer que $a \neq -a$ puis que $a \neq -b$)
3) Soit $P \in \mathbf{C}[X]$, montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que

$$Q(X^2) = P(X)P(-X).$$

4) En déduire un polynôme de degré 3 ayant pour racines a^2, b^2 et c^2.