ALGÈBRE

Rapporteur Monsieur Claude PETITJEAN

1) Présentation du sujet :

L'épreuve se composait de deux problèmes :

Un problème d'algèbre explorait :

- un produit scalaire sur l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à deux,
- l'orthogonalité d'un endomorphisme pour ce produit scalaire,
- le groupe orthogonal associé,
- des exemples d'endomorphismes de cet espace vectoriel,
- une rotation donnée par sa matrice dans une base orthonormée.

Un problème de géométrie, où l'on mettait en évidence les liens entre une cubique très simple et une parabole qui était en fait sa courbe orthoptique. On n'allait pas jusqu'à la démonstration de cette propriété.
On couvrait un vaste pan du programme de première année sans délaisser l'algèbre bilinéaire vue en deuxième année dans la partie produit scalaire.

2) Remarques générales :

La longueur raisonnable de l'épreuve et la difficulté mesurée des calculs et des vérifications à effectuer ont conduit à un étalement correct des notes, certains candidats ayant presque tout fait.

La qualité des copies est en grande partie fonction de l'aptitude des candidats à se poser la question primordiale qui reviendra sans arrêt par la suite :

EST-CE QUE CE QUE J'ECRIS A UN SENS ?

Les notes faibles sont dues à une mauvaise connaissance ou compréhension des définitions du cours et aux confusions multiples entre les divers objets étudiés que cela occasionne.

La plupart des copies sont propres et numérotées avec soin. L'orthographe semble en progrès.

Certains candidats ont judicieusement géré leur temps en se consacrant de façon plus importante au problème 2 où ils étaient plus à l'aise.

3) Remarques particulières par questions :

Problème 1

Question 1 :

La pierre d'achoppement a été la définie positivité où beaucoup s'arrêtent à P(0) = 0 ce qui n'est pas la même chose que P = O.

C'est le fait que 0 soit racine triple de P et que le degré de P soit inférieur ou égal à deux qui permet de conclure que < P, P > = 0 entraîne P = 0.

Pour vérifier la bilinéarité, on ne peut se contenter de < P + T , Q>, il y a aussi une loi externe. Curieusement on lit des < λ(P+T) , μQ>.

On rencontre aussi des φ(A,B) (X) comme si le produit scalaire dépendait de X.

Question 2 :

La détermination d'une base orthonormée, immédiate ici, a conduit certains à utiliser consciencieusement la méthode de Schmidt.

Question 3 :

Sans difficultés sauf pour ceux qui écrivent

« $\langle P, Q\rangle = \begin{bmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & bb' & 0 \\ 0 & 0 & 4cc' \end{bmatrix}$ ». Un produit scalaire donne un scalaire !

Question 4 :

Une des plus maltraitées : tout d'abord par tous ceux qui n'ont pas lu le rapport 2006, qui ne connaissent pas la signification mathématique de « propriétés équivalentes » et qui ont traité la question 4a puis la question 4b.

Ceux qui posent correctement le problème et qui savent leur cours reconnaissent bien dans la propriété a « u conserve le produit scalaire » et continuent par « donc sa matrice A est orthogonale » oubliant hélas que ceci n'est le cas que dans une base orthonormée. La base B n'est qu'orthogonale.

Question 5 :

La question la plus mal abordée : pour ceux qui ont l'idée de sous groupe, rappelons que $(M_3(R),.)$ n'est pas un groupe ; il fallait penser au groupe $GL_3(\mathbb{R})$ des matrices inversibles et commencer par justifier qu'une matrice A de G était inversible en prenant le déterminant des matrices figurant dans l'égalité.

Questions 6 et 7 :

Deux questions sélectives.

Tout d'abord ne pas oublier la moitié de la question :
une application linéaire n'est pas caractérisée par v(P+Q) = v(P) + v(Q) : et la loi externe ?
Un endomorphisme de E ne se réduit pas à une application linéaire. La justification que v(P), ψ(P) et ψ_1 (P) appartiennent à E est essentielle.

Ensuite la matrice d'un endomorphisme dans une base est carrée. Combien de matrices (a+b+c, 2b+c , c) ou de matrices carrées où figurent des a, b, c voire X dans leurs coefficients !

Notons avec satisfaction que la question de l'équation différentielle a été traitée très correctement et que le lien avec les endomorphismes précédents a été perçu et exploité.

Question 8 :

Beaucoup de confusion entre affine et vectoriel.
On lit que r est un déplacement, un vissage.
La calculatrice étant autorisée, le candidat doit prévenir le correcteur de son usage.
Une affirmation sans autre commentaires du type « ${}^tA A = I$ » est un peu courte.

On pouvait bien sûr s'assurer que les vecteurs colonnes étaient orthogonaux deux à deux et normés.
Bien sûr la sempiternelle sottise « det A = 1 donc c'est une matrice orthogonale » ne nous aura pas été épargnée.

La détermination précise de l'angle c'est-à-dire le choix entre +π/2 et - π/2 a été rarement traitée.

Nous recommandons aux candidats qui aboutissent à des résultats incohérents et qui s'en rendent compte de bien signaler ce qui à leur point de vue ne va pas, de dire qu'ils ont fait probablement une erreur quelque part (d'ailleurs qui n'en fait pas ?).
On éviterait ainsi d'écrire des conclusions aberrantes telles que : « le vecteur nul est le seul vecteur invariant par r et c'est donc une rotation d'axe le vecteur nul ».

Problème 2

Question 1 :

Le point stationnaire est mal traité.
Les termes précis ne sont pas employés : on lit
« en 0 on a une asymptote horizontale »
« en $+\infty$ on a une tangente verticale »
« l'asymptote est une branche parabolique d'axe Oy »

Question 2 :

Certains candidats confondent allègrement courbe et surface et on apprend ainsi que Γ est une droite, un cône de révolution ou un hyperboloïde à deux nappes.

Les questions d, e et f ont été rarement abordées.

Question 3 :

On ne respecte pas toujours la place de l'origine du repère.
Il y a des incohérences entre les courbes et le texte :

- Des courbes tangentes qui se coupent très franchement.
- Une tangente qui devient sécante.

Pour conclure, la réussite à cette épreuve passe par :

- la connaissance du cours : définitions et principaux théorèmes,
- l'identification des objets en cause et l'association à chacun d'eux des propriétés qui s'appliquent afin d'éviter les confusions signalées plus haut.
- l'écriture de choses qui ont un sens.

Un nombre réel, une matrice ligne, une matrice 3-3, une fonction polynôme, un endomorphisme d'un espace vectoriel, une base d'un espace vectoriel, voilà des objets tous différents !

De même en géométrie, distinguer le cadre vectoriel du cadre affine, comprendre ce qu'apporte en plus la structure euclidienne, tenir compte de la dimension de l'espace pour ne pas mélanger courbes planes ou gauches, surfaces, solides, c'est la condition nécessaire pour partir sur de bonnes bases.

Vous aurez remarqué dans les citations extraites des copies, l'abondance des « c'est .. » ou « elle… ».
Sachez que les mathématiques ont horreur des pronoms personnels !

Si vous vous forcez à faire des phrases avec un sujet identifié et PRECIS, le correcteur saura de quoi vous parlez :
« la suite numérique untel converge »,
« la série de nombres untel converge »,
« l'intégrale généralisée untel converge »,
Etc…

Faire la différence entre tous , c'est-à-dire <u>se hisser au niveau des concepts</u>, est indispensable pour réussir.
C'est ce qu'ont fait les meilleurs dans cette épreuve et ce peut être le lot du plus grand nombre.