Rapport de l'épreuve de Mathématiques 1.

Ariel.Dufetel.

L'objectif de l'épreuve est de déterminer la transformée de Laplace de la fonction logarithme.

Partie 1 :

1) Il est regrétable que de trop nombreux candidats ne lisent pas l'énoncé et étudient les fonctions φ et ψ sur $\mathbb{R}$, il est demandé une étude sur l'intervalle $[1,+\infty[$, en particulier il faut tracer les courbes dans le demi plan $x \geq 1$.

2) Trop peu de candidats utilisent le signe des fonctions φ et ψ pour étudier la monotonie des suites.

3) On sait que toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment mais de très nombreux candidats généralisent ce théorème à un intervalle ce qui est faux.

Très peu de candidats connaissent la somme des termes d'une suite géométrique.

Le jury aimerait que les candidats connaissent la formule :

$$\sum_{p=0}^{n} q^p = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Partie 2 :

4) Si le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_x^a \ln(t)\,dt$ est correctement fait , les candidats ne donnent pas une valeur particulière aux constantes A, β et n pour justifier que ln est élément de E, ce que les correcteurs regrettent.

5) Les candidats qui ont abordé cette question l'ont en général bien faite.

6) L'objet de cette question est de prouver l'intégrabilité de la fonction φ_x sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$.

La fonction φ_x est continue de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$ donc elle est intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$ mais en aucune façon on ne doit en conclure qu'elle est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, pour répondre à la question on doit, en plus, faire une étude au voisinage de 0 et de $+\infty$.

7) Attention à la rédaction, il faut écrire :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad \mathcal{L}(\lambda f+g)(x) = \lambda \mathcal{L}(f)(x) + \mathcal{L}(g)(x),$$

soit

$$\mathcal{L}(\lambda f+g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g).$$

8) Si beaucoup de candidats font une intégration par parties très peu la justifient.

9) Après avoir fait tendre α vers $+\infty$, on obtient la relation de réccurence :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad \int_0^{+\infty} t^{k+1}\,\mathrm{e}^{-xt}\,dt = \frac{k+1}{x}\int_0^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Soit :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad \mathcal{L}(f)(x) = \frac{k!}{x^{k+1}}.$$

10) On a, pour tout réel $t \geq 1$, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}| = 1$. On particularise $A=1$, $\beta=1$ et $n=0$, comme f est continue sur $[0,a]$ alors elle est intégrable sur $]0,a]$ donc f est élément de E.
Un simple calcul de primitive nous donne :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad \mathcal{L}(f_\omega)(x) = \frac{1}{x-\mathrm{i}\,\omega} = \frac{x+\mathrm{i}\omega}{x^2+\omega^2},$$

puis en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad \mathcal{L}(\cos_\omega)(x) = \frac{x}{x^2+\omega^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\sin_\omega)(x) = \frac{\omega}{x^2+\omega^2}.$$

Partie 3.

11) La condition de domination est nécessaire pour avoir le droit d'utiliser le théorème du cours.

12) Une intégration par parties en posant $u(\theta) = \sin(t\cos\theta)$ et $v(\theta) = \sin\theta$ permet de conclure.

13) Question très simple, il suffit d'utiliser la formule $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

14) La fonction J est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur $]0,a]$.

15) De nombreux candidats ont utilisé la parité et la périodicité de la fonction $\theta \mapsto \dfrac{1}{x^2+\cos^2\theta}$ mais un manque de rigueur a été préjudiciable à trop de candidats.

Partie 4.

17) Cette question montre l'importance de lire un sujet dans sa globalité.

De la question 4 on déduit que la fonction ln est élément de E, puis de la question 6 que, pour tout réel x strictement positif, la fonction $t \longmapsto \ln(t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, en particularisant $x=1$ on en déduit l'intégrabilité de g sur $]0,+\infty[$.

18) Une faute de frappe dans l'expression de U_n, il fallait lire :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad U_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \ln(x) & \text{si } x \in]0,n[\\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

On remarquera que cette faute n'ôtait pas leur sens aux questions suivantes.

Les correcteurs, après concertation, en ont tenu compte, en particulier pour les candidats qui ont remarqué cette erreur et qui ont proposé une version corrigée.

Les candidats devraient savoir que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x}$.

19) Après quelques calculs, on obtient :

$$J_n = \frac{n}{n+1}\left(\ln n - \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p}\right) = \frac{n}{n+1}\left(\ln n - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(-\gamma_n - \frac{1}{n+1}\right).$$

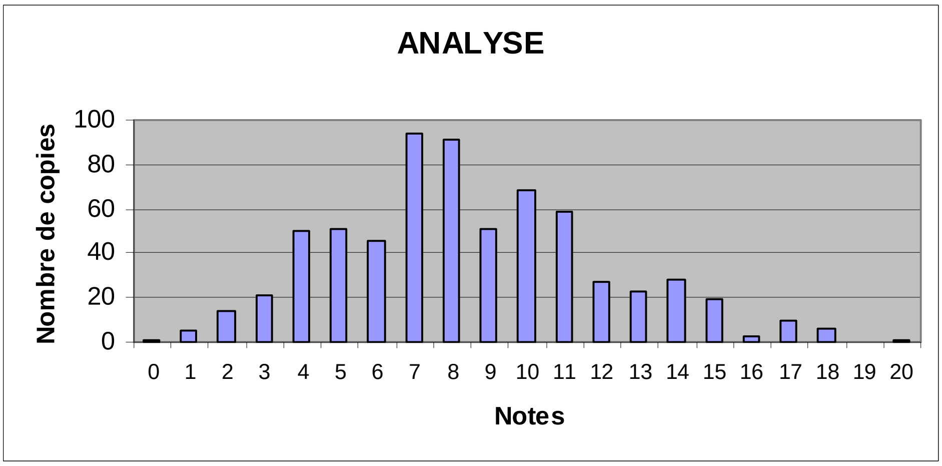
Peu de candiats on trouvé la réponse aux deux dernières questions .

Conclusion :

On ne peut qu'encourager les candidats à faire preuve de plus de rigueur. Une copie soignée, bien écrite et sans rature doit être proposée aux correcteurs.

Il faut lire le texte du problème dans sa totalité avant de commencer à rédiger.

Trop de candidats ne connaissent pas les hypothèses des théorèmes, un travail constant toute l'année doit permettre aux futurs candidats de proposer des copies de qualité.


ANALYSE
Nombre de copies
100
80
60
40
20
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Notes