Mathématiques 2

Monsieur DE SAINT JULIEN Arnaud

1 Présentation du sujet

Ce problème s'intéresse aux groupes d'isométries de $\mathbb{R}^n$. On y prouve d'abord que le groupe des isométries d'une norme euclidienne est conjugué au groupe orthogonal. Ensuite on établit que, dans le cas des normes p dites de Holdër, le groupe des isométries est fini de cardinal indépendant de p.

Le problème était bien construit, détaillé et progressif, mais peut-être un peu long (même si certains candidats ont abordé toutes les questions). Le texte était proche du cours, de difficulté raisonnable.

Les thèmes mis en jeu balayaient une très large partie du programme d'algèbre :
- espaces euclidiens (produit scalaire, identité du parallélogramme, isométries, matrices orthogonales, matrices symétriques réelles)
- géométrie (étude d'une quadrique et quelques petits raisonnements géométriques)
- groupes
- algèbre linéaire (réduction des endomorphismes, applications linéaires en dimension finie)
- polynôme interpolateur
- analyse (fonction continue sur un compact, inégalité de convexité).

2 Appréciation générale des copies

Les résultats des candidats sont contrastés, la fourchette des notes très large. Le sujet était assez proche du cours, ce qui a permis de déceler des carences chez certains candidats. D'autres, qui ont réussi à garder le fil du sujet (qui était assez guidé), ont récupéré des points dans chaque partie. Les questions de géométrie n'ont pas toujours été abordées mais ont donné lieu parfois à de très bonnes réponses.

Trop de candidats rendent une copie mal rédigée et/ou mal présentée. La rigueur fait aussi défaut, attention à l'utilisation du «si et seulement si». Donnons deux conseils pour terminer :
- il y a une différence entre «justifier» et «montrer que» ; un «justifier» attend généralement une réponse rapide.
- si la calculatrice est autorisée, et que l'on demande par exemple de calculer un polynôme caractéristique sans **explicitement demander le détail du calcul**, on peut écrire directement sur la copie le résultat fournie par la calculatrice !

En résumé, c'est un sujet qui a bien joué son rôle et permis de bien classer les candidats. La moyenne de l'épreuve est de 10,45 et l'écart-type est de 3,93.

3 Remarques détaillées par question

I Description des normes euclidiennes

1. Pas de problème en général pour redémontrer l'identité du parallélogramme. En revanche, pour prouver que les normes p ne sont pas euclidiennes, certains écrivent des inégalités sans vraiment rien prouver. Il faut exhiber un contre-exemple dans $\mathbb{R}^n$ (et pas seulement $\mathbb{R}^2$). A signaler que certains disent que la norme 2 est euclidienne car elle vérifie l'identité du parallélogramme. Cette réponse est correcte (bien que le résultat ne soit pas au programme de MP), mais il suffit d'affirmer qu'elle est associée au produit scalaire canonique.
2. Certains affirment que la symétrie est évidente, il y a pourtant des choses à écrire.
3. Certains oublient la symétrie ou la «définie positivité».

II Quelques généralités et exemples

4. La notion de sous-groupe n'est pas maîtrisée par tout le monde et est même parfois confondue avec celle de sous-espace vectoriel. La stabilité par composition est presque toujours vérifiée, ainsi que le fait que l'ensemble soit non vide, alors que la stabilité par passage à l'inverse beaucoup moins. Enfin beaucoup oublient de montrer que $\mathrm{Isom}(N)$ est inclus dans $GL(E)$ ou alors disent que c'est le cours, confondant $\mathrm{Isom}(N)$ avec le groupe orthogonal (même si la démonstration est la même).
5. Souvent une seule inclusion a été prouvée et des équivalences fausses ont été écrites. On divise souvent par $\|x\|$ sans se soucier de sa non-nullité.
6. Cette question de géométrie a souvent été sautée, ou a donné lieu à de mauvaises réponses. Elle n'est pourtant pas difficile. On pouvait répondre par des calculs ou par des considérations géométriques. A noter que certains ont confondu les sphères unité pour la norme 1 et la norme infinie.
7. Cette série de question demandait d'orthodiagonaliser une matrice symétrique réelle et d'étudier la quadrique associée. Les valeurs propres et les espaces propres sont très souvent corrects, mais le candidat oublie de normer ses vecteurs propres et ne trouve pas une matrice de passage orthogonale. Pour justifier que la norme est euclidienne, il suffit de dire que les valeurs propres de S étaient strictement positives et donc S définie positive. Certains candidats ont fait autrement et ont exhibé la décomposition $q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2y^2 + (x - z)^2$. Les questions suivantes de géométrie ont souvent été sautées mais ont aussi donné lieu à de très bonnes réponses.

III Etude de $\mathrm{Isom}(N)$ lorsque N est euclidienne

8. Assez bien réussie. Les étudiants ont pensé à utiliser une identité de polarisation.

   L'égalité matricielle est presque toujours établie avec plus ou moins de justifications. A noter l'erreur suivante : si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAX = 0$, alors $A = 0$ (prendre A antisymétrique non nulle).

9. Question facile mais avec beaucoup d'erreurs. Certains confondent cardinal et dimension ou disent que le groupe orthogonal est un espace vectoriel.
10. Certaines confusions pour la bijectivité d'une application linéaire injective qui n'est pas un endomorphisme : la dimension finie ne suffit pas, les espaces de départ et d'arrivée doivent avoir la même dimension. Bizarrement, pour l'existence du polynôme interpolateur, certains l'ont explicité alors que la question précédente permettait de conclure. La question 10.b était un peu plus délicate à rédiger puisque les u_i n'ont pas besoin d'être distincts.
11. La racine carrée de matrice est presque toujours trouvée, mais on oublie souvent de montrer qu'elle est bien symétrique définie positive. On rappelle aussi que $M_n(\mathbb{R})$ n'est pas intègre, erreur fréquemment rencontrée.
12. Certains pensent qu'il s'agit d'un morphisme d'espaces vectoriels alors qu'il s'agit d'un morphisme de groupes. Là encore, certains confondent dimension et cardinal.

IV Etude du cardinal de Isom(p)

13. Une erreur rencontrée : u conserve la norme des vecteurs de la base canonique donc la norme de tout vecteur ! La matrice a été trouvée la plupart du temps.
14. Assez souvent réussie lorsque c'est traité même si les cas particuliers a ou b nul sont souvent oubliés. L'inégalité de Cauchy-Schwarz a été reconnue.
15. Bien réussie lorsque traitée.
16. L'existence du maximum d'une fonction continue sur un compact a été bien justifiée.
17. Certainement la question la plus délicate du problème, qui n'a quasiment jamais été bien traitée.
18. Des réponses parfois un peu rapides (c'est vrai que c'est la fin du sujet).
19. Très peu de candidats ont trouvé le bon cardinal.