MATHÉMATIQUES

Rapporteur Monsieur Serge LAURENT

1 – Déroulement de l'épreuve

L'épreuve est constituée d'une préparation d'une demi-heure, suivie d'une demi-heure de passage devant l'examinateur.

Le candidat a deux exercices à préparer, l'un d'analyse ou de géométrie différentielle, l'autre d'algèbre ou de géométrie. On notera qu'une planche sur deux comporte de la géométrie. L'un au moins des deux exercices est l'application assez immédiate du cours.

A l'issue de sa préparation, le candidat présente devant l'examinateur l'exercice de son choix en premier. Au bout de 15 minutes, l'examinateur l'invite à passer à l'autre exercice. Une question de cours peut éventuellement être posée.

Selon les planches, la calculatrice était autorisée ou interdite. Cette année, la notation n'a pas sanctionné les candidats qui n'auraient pas fait usage de leur calculatrice là où elle était autorisée.

Néanmoins, il est vivement conseillé aux candidats passant l'année prochaine de se munir de leur calculette et de savoir l'utiliser dans des cas simples, le nombre de planches nécessitant l'usage de la calculatrice pour des calculs numériques simples étant amené à augmenter. Par contre, aucune question de programmation ne sera posée.

Pour chacun des deux exercices, l'examinateur invite le candidat à présenter le fruit de sa recherche ; sauf faute flagrante de sa part, l'examinateur ne l'interrompt pas lors de cette première phase. Par la suite, s'instaure une discussion pendant laquelle l'examinateur peut donner des indications pour aider un candidat « coincé », ou lui demander des précisions concernant les hypothèses d'un théorème.

2 – Quelques remarques concernant l'évaluation des candidats

La note attribuée est une note globale. Néanmoins, les examinateurs ont porté une attention toute particulière aux points suivants :

- Connaissance et compréhension du cours. En particulier, les théorèmes doivent être sus avec leurs hypothèses. Sauf exception (afin de rétablir une formule oubliée par exemple), aucune démonstration de cours n'est demandée.

- Qualité de l'expression orale. Il importe qu'un futur ingénieur sache s'exprimer à voix claire et intelligible, tout en se détachant parfois de son tableau pour se tourner vers son interlocuteur. A contrario, le jury a sanctionné les candidats qui marmonnent le nez collé au tableau, en masquant de leur corps ce qu'ils écrivent.

- Esprit d'analyse et capacité d'initiative. Il convient ici de rappeler qu'un candidat qui aurait bien analysé l'exercice, et proposé une piste qui n'aboutirait pas peut se voir attribué une excellente note. Inversement, un candidat qui se contenterait de dire « je n'ai rien fait », sans développer les pistes infructueuses qu'il a explorées lors de sa préparation sera sanctionné. La proportion de tels candidats est néanmoins faible.

- Qualité d'écoute et de dialogue. Un certain nombre de candidats a une écoute insuffisante : ainsi, les indications proposées par le jury ne sont pas prises en compte.

Certains même n’hésitent pas à couper l’interrogateur alors que celui-ci tentait de leur donner un indice. Une telle absence d’écoute sera durement pénalisée. Par contre, il n’est pas interdit de demander au jury de répéter ou de modifier la formulation d’une question ou d’une indication mal comprise : ceci rentre dans le cadre normal d’un dialogue.

3 – Quelques conseils en cas de panne lors de la préparation

Rappelons tout d’abord que le fait de ne pas trouver tout de suite (de « sécher ») est le lot de tout scientifique. Ainsi il ne faut pas hésiter à explorer des pistes, et ne pas s’affoler lorsqu’elles n’aboutissent pas. Il ne faut pas hésiter non plus à parler à l’examinateur de ces tentatives vaines, voire d’analyser la cause de l’échec.

Néanmoins, en cas d’absence complète d’idée, la première des choses à faire est de relire attentivement l’énoncé. Par exemple si un énoncé commence par “on se place dans un espace euclidien et on considère la matrice.....”, le fait qu’il soit donné un produit scalaire ou une base orthonormée doit avoir une importance sinon ce ne serait pas indiqué !

Enfin, et ceci vaut aussi bien pour la préparation que lors du passage devant l’examinateur : se réciter les différents résultats du cours ayant un rapport avec la situation proposée. Il y a certainement l’un d’entre eux qui est utilisable !

4 – Les principales difficultés

Il ne s’agit pas ici de donner un bêtisier de l’oral, mais de mettre en évidence les parties du cours les plus mal comprises.

Avant toute chose, rappelons que le programme du concours est celui des deux années. Ainsi l’acquisition du programme de première année est également contrôlée. Le jury invite les candidats à revoir les parties suivantes qui sont peu ou pas reprises en deuxième année :

Suites récurrentes, polynômes, les nombres complexes et leurs applications géométriques (similitudes, racines n-ièmes).

Regardons maintenant plus en détail les points faibles des candidats :

4.1 – En algèbre générale et linéaire

Les racines n-ièmes d’un nombre complexe constituent le gros point noir en algèbre générale.
En algèbre linéaire, la représentation des sous-espaces vectoriels échappe à beaucoup qui semblent oublier que ces derniers passent systématiquement par l’origine.
De même, certains oublient que les applications linéaires fixent l’origine. Ainsi la majorité des candidats citent les translations ou les vissages comme exemples d’isométries vectorielles.
Lors du calcul des déterminants ou des polynômes caractéristiques, trop de candidats se précipitent sur la règle dite de Sarrus sans chercher à simplifier la matrice. Sauf dans de rares exceptions, cette règle de calcul est à proscrire, surtout lors de la détermination du polynôme caractéristique car elle amène le candidat devant un polynôme de degré 3 qu’il sera incapable de factoriser par la suite.

4.2 – Séries et intégrales

On rappelle une fois de plus que les règles dites de comparaisons ne sont valides que pour les séries à termes positifs (respectivement pour les fonctions positives), et s’appliquent sur le terme général de la série (respectivement sur la fonction à intégrer).
Les hypothèses du critère sur les séries alternées sont trop rarement données dans leur intégralité.

Certaines questions sont mal comprises : donner le domaine de définition d'une fonction F définie comme intégrale dépendant d'un paramètre x revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale converge.
Enfin, il faut se méfier de certaines évidences : la limite lorsque t tend vers 0 de t^a n'est pas forcément 0 (penser au cas $a \leq 0$).
Les séries entières n'ont pas été trop bien traitées cette année : beaucoup de candidats oublient qu'elles peuvent être dérivées terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence afin de se ramener à une série connue.
Enfin, gros point noir : aucun candidat ne connaît les hypothèses des théorèmes de Dirichlet et de Parseval. Concernant toujours les séries de Fourier, il semble indispensable de commencer l'étude par le tracé de la fonction, afin de pouvoir justifier au moins graphiquement qu'elle a la régularité requise.

4.3 – Equations différentielles

Là aussi, le cours est trop mal su : les candidats savent vaguement qu'une équation linéaire du second ordre a pour ensemble de solution un espace de dimension 2, mais ignorent si cet espace est vectoriel ou affine, ignorent que ce résultat n'est valide que sur un intervalle où la fonction « devant y'' » ne s'annule pas, ou encore pire ne savent pas la forme requise pour qu'une équation soit linéaire.
Enfin, qu'il s'agisse d'équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles, la technique du changement de variable est le plus souvent incomprise. Les candidats oublient qu'un changement de variable s'accompagne d'un changement de fonction, et éprouvent par la suite de grandes difficultés à faire des dérivations correctes.

4.4 – Géométrie

La première difficulté vient de la géométrie analytique. L'idée générale qu'une équation définit 'sauf exception' une courbe en dimension 2 et une surface en dimension 3 n'est pas acquise. De même, peu de candidats savent qu'une courbe en dimension 3 est donnée a priori par deux équations cartésiennes. Il est par ailleurs impardonnable de ne pas savoir donner les équations des axes. Les formules donnant la distance d'un point à une droite (dans le plan) ou à un plan (dans l'espace) sont trop souvent ignorées.
Concernant la géométrie des transformations, le cours est trop mal su. Tout d'abord, les candidats oublient presque systématiquement de vérifier au préalable que la matrice est orthogonale, pour se précipiter sur son déterminant. Par la suite la classification des isométries affines et vectorielles est trop mal connue, ce qui amène régulièrement à penser qu'une translation est un candidat plausible pour un automorphisme orthogonal.
La reconnaissance des différentes quadriques est par ailleurs plutôt aléatoire !

5 – Quelques exemples de planches

Afin de guider les candidats et leurs professeurs, voici quelques exemples de planches complètes :

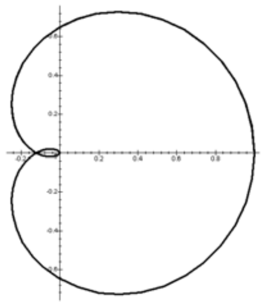
5.1 – Exemple 1

EXERCICE 1

Convergence et calcul de $\int_0^1 \frac{x\,\mathbf{ln}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *On pourra être amené à faire une intégration par parties puis un changement de variable.*

EXERCICE 2

Soit la courbe d'équation polaire $\rho = \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^3$, dont la représentation est donnée par :



1 – Donner sa période et sa symétrie.
2 – Donner la direction de la tangente quand la courbe coupe l'un des axes de coordonnées.
3 – Donner **tan**(v) où v est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{T}$.
4 – En déduire les points à tangente verticale et horizontale.
5 – Donner sa longueur.

5.2 – Exemple 2

EXERCICE 1

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $x_0\in[0,1]$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n + \cos(x_n)}{2}.$$

1°) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0,1]$.

2°) Montrer que $(x_n)_n$ est monotone (on pourra éventuellement étudier les variations sur [0,1] de la fonction $x \to \frac{x+\cos x}{2}$). En déduire que (x_n) converge vers un réel l vérifiant $\cos(l) = l$.

3°) Combien de solutions l'équation **cos**(x)=x a-t-elle sur [0,1] ? Sur $\mathbb{R}$?

4°) Prouver l'existence d'un réel k<1 tel que pour tout entier n : $|x_n - l| \le k^n |x_0 - l|$.

EXERCICE 2

1 - Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.

2 – Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 4x + y + z \\ y' = x + 4y + z \\ z' = x + y + 4z \end{cases}.$$

3 – Déterminer la solution de ce système vérifiant : $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = -1 \end{cases}$.

5.3 – Exemple 3

EXERCICE 1

On se place dans l'espace affine euclidien muni du repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Pour quelles valeurs de *a* la surface d'équation $ax^2+ay^2+az^2-2xy-2yz-2zx=1$ est-elle un ellipsoïde ?

EXERCICE 2

On pose $F\left(x\right)=\int_x^{2x}e^t\,\frac{dt}{t}$.

1 – Justifier que *F* est définie sur R*.
2 – Montrer que *F* est dérivable sur R* et donner sa dérivée ainsi que sa monotonie.
3 – En encadrant e^t sur [x,2x] ou sur [2x,x], déterminer les limites de *F* aux bornes de son domaine et construire son tableau de variations.

5.4 – Exemple 4

EXERCICE 1

Soit α un réel. Résoudre l'équation différentielle : $y''-2y'+\left(1-\alpha^2\right)y=e^x$.

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien est mini du repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit *f* l'application qui au point *M*(*x*,*y*,*z*) associe le point *M'*(*x'*,*y'*,*z'*) tel que :

$$\begin{cases} x'=z \\ y'=-x+1 \\ z'=-y+2 \end{cases}.$$

1 – Montrer que *fofof* est une translation de vecteur $\vec{u}$ dont on donnera les coordonnées. Soit *t* la translation de vecteur $-\frac{1}{3}\vec{u}$.
2 – Etudier *tof*.
3 – En déduire que *f* est un vissage dont on donnera les éléments caractéristiques.

5.5 – Exemple 5

EXERCICE 1

Vérifier que la fonction $x\to e^x$ est solution de l'équation différentielle :

$$\left(1+x\right)y''-2y'+\left(1-x\right)y=0.$$

Déterminer alors l'ensemble des solutions de cette équation.

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, on désigne par *A* le point de coordonnées (-*a*,0), *a* étant un réel strictement positif, et par *C* le cercle de centre *O* et de rayon *a*.
M étant un point du cercle, on désigne par *P* et *Q* ses projections sur $\left(O,\vec{i}\right)$ et $\left(O,\vec{j}\right)$. On désigne par *N* l'intersection des droites (*PM*) et (*AQ*). Déterminer les équations paramétriques et construire le lieu des points *N* quand *M* décrit le cercle *C* (on pourra utiliser comme paramètre l'angle polaire de *M*).

6 – Bilan

Comme chaque année, les résultats restent assez disparates : d'excellents candidats (en nombre non négligeable) côtoient des candidats indigents tant au niveau de leurs faibles connaissances mathématiques que du point de vue de leur absence totale de combativité. Néanmoins, le niveau global reste tout à fait convenable, même si le cours mériterait d'être parfois appris avec un peu plus de précision.

Le jury tient à féliciter tous les candidats reçus, et est persuadé que l'immense majorité d'entre eux dispose de toutes les qualités requises pour devenir de très bons ingénieurs.