ANALYSE

Rapporteur Monsieur Gilbert MONNA

L'épreuve d'analyse commençait par une partie élémentaire sur les équations différentielles linéaires du premier et du second ordre. La deuxième partie était consacrée à l'étude de l'une des solutions des équations précédentes, afin d'établir une inégalité utile pour la suite. La partie suivante était consacrée à l'étude de trois moyennes de nombres réels strictement positifs (arithmétique, géométrique et harmonique), à des comparaisons entre elles et à des applications immédiates de ces inégalités. Dans la quantième partie on utilisait les résultats précédents, ainsi que des techniques d'intégration d'inspiration géométrique pour commencer l'étude de la suite de terme général $\sqrt[n]{n!}$.

On utilisait ensuite ces résultats pour déterminer la nature d'une série. La partie V continuait l'étude de la suite et conduisait à un équivalent qui permettait de déterminer la nature de deux nouvelles séries numériques.

L'épreuve semblait de longueur raisonnable et de fait a été pratiquement terminée par un certain nombre de candidats, plus que les années précédentes à priori, mais avec des fortunes diverses. Il faut noter aussi que pour ceux qui calculaient lentement, les deux premières parties pouvaient prendre du temps ce qui a probablement handicapé certains, mais la vitesse est aussi un critère d'évaluation. Le sujet était très progressif, ainsi les deux premières parties étaient surtout calculatoires, les difficultés de compréhension ne commençant qu'à la partie III, ce qui a provoqué des abandons à ce niveau.

On peut observer que le sujet balayait une bonne partie du programme d'analyse de la classe de 2$^{\text{ème}}$ année, avec des incursions importantes dans celui de première année, par exemple avec les équations différentielles linéaires du premier ordre, une étude de fonction et une représentation graphique.

Ce sujet s'est révélé classant, puisque les performances vont de la copie à peu près blanche du candidat qui ne connaît même pas le programme de terminale à des résolutions à peu près complètes du problème. Une faute de frappe avait échappé à toutes les relectures : à la question III) 1) c) on trouvait un terme $4x^2y^2x^2$ (qui était assez surprenant) alors qu'on aurait dû trouver $4x^2y^2z^2$. La question était une application du résultat précédent et n'intervenait absolument plus dans la suite du problème, donc cette erreur assez facile à corriger n'a eu aucune incidence sur les résultats.

La première question portait sur une équation différentielle linéaire du premier ordre, en principe étudiée en terminale. Il est clair qu'il n'y a pas grand chose à attendre de ceux qui bloquent à ce niveau. Il y en a quelques uns....Signalons à propos de cette question que exp(ln(x)) = x et qu'il est agaçant pour un correcteur de voir un candidat répéter sur plusieurs lignes, voire plusieurs pages, exp(ln(x)), sans jamais simplifier. Nous avons aussi observé un phénomène assez particulier : quelques candidats qui ont oublié (ou n'ont jamais connu) la méthode de variation de la constante pour une équation différentielle linéaire du premier ordre explorent la suite de l'énoncé en essayant toutes les fonctions qu'ils rencontrent. Ils tombent assez vite sur une solution particulière, mais ont quelques problèmes pour justifier sa "découverte".

On passait ensuite à une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients non constants, ce qui n'empêchait pas quelques candidats d'en déterminer une soi-disant équation caractéristique, méprisant d'ailleurs l'indication de l'énoncé qui permettait de trouver une solution particulière puis suggérait une variation de constante pour aboutir à une base de solutions. La dernière question demandait la justification de l'existence et l'unicité d'une solution avec conditions initiales données. On attendait plutôt l'utilisation du théorème de Cauchy, mais les candidats, peut-être rebutés par ses côtés abstraits ont préféré la méthode plus calculatoire consistant à utiliser l'expression générale des solutions obtenues à la question précédente et à déterminer les constantes. C'est tout à fait correct d'un point de vue mathématique et les correcteurs ont bien sûr attribué la note maximale prévue.

La partie suivante était consacrée à l'étude d'une fonction et si le tableau de variation était correct sur la plupart des copies, il n'en était pas de même de l'étude des branches infinies, en particulier de la direction asymptotique, trop souvent confondue avec une asymptote. Sur cette partie nous avons observé un grand nombre de résultats donnés sans justification, ainsi qu'un nombre assez important de copies dans lesquelles il n'y avait aucune représentation graphique. Faut-il y voir une conséquence de l'interdiction des calculatrices, qui empêchait de recopier ce que l'on voyait sur l'écran ? La partie se terminait par deux intégrales généralisées sans grandes difficultés, assez souvent bien traitée mais qui ont donné lieu aux perles classiques, comme la confusion entre dérivation et intégration qui conduit à affirmer qu'une primitive de $x \to \frac{1}{x}$ est $x \to \frac{-1}{x^2}$, ou , sortant des sentiers battus, comme ce candidat qui donne $x \to: \ln\left(\frac{x^2}{2}\right)$ comme primitive de $x \to \ln(x)$.

A la partie III les comparaisons entre les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique représentaient sans doute un pas important dans l'abstraction puisqu'on assistait à une forte chute de l'indice de réussite. La partie était assez souvent complètement ignorée et quand elle était abordée c'est généralement de façon fort lacunaire. En fait les candidats qui l'ont réussie correctement sont souvent allés avec succès jusqu'à la fin du problème.

La partie suivante a été abordée par plus de candidats que la précédente, probablement parce qu'elle est plus classique, mais c'était souvent la rédaction qui laissait à désirer. Ainsi, à la première question, il était important de préciser clairement à quels nombres on appliquait l'inégalité entre les moyennes.

Signalons, à propos de la question 2, une perle particulièrement réussie : un candidat ne comprend visiblement pas pourquoi on se donne tant de mal pour encadrer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Il y a beaucoup plus simple :

On sait que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{2}{n(n+1)}$

......cela se passe de commentaire.

Les questions 3) b) et 4) a) étaient probablement les plus difficiles du problème et n'ont été traitées correctement que par un très petit nombre de candidats. Tous les éléments étaient donnés pour permettre de répondre à la question 4) b), mais encore fallait-il connaître son cours..... Précisons pour les futurs candidats que la question "nature de la série" est sans ambiguïté, on demande si la série est convergente ou divergente, et que la réponse "la série est alternée" vaut 0, (même avec une précision inattendue donnée par un candidat qui trouve que c'est une série alternée à thermes positifs, il y aurait donc un thermalisme mathématique....).

Dans la partie V on précisait le résultat précédent pour obtenir un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$ en vue de "donner la nature" de deux autres séries. La première question était un peu ambiguë, puisqu'on pouvait donner beaucoup d'inégalités, certes exactes, mais qui ne permettaient pas d'aller plus loin.

Comme c'est souvent le cas pour les dernières questions, l'équivalent n'était pas donné, ce qui a bien sûr limité les réponses et encore plus les réponses exactes. Ce qui est plus surprenant c'est que sur des bonnes copies on trouvait un équivalent exact (à constante multiplicative près en général) mais rien sur la dernière question, qui était pourtant, quand on a la réponse correcte à la question précédente, une application directe du cours......

Cela nous amène à un premier conseil aux futurs candidats : apprenez votre cours, il était clair que les candidats ont montré des savoir-faire techniques de niveaux différents, mais que, quel que soit leur niveau, la performance était diminuée par une mauvaise connaissance du cours qui limitait les utilisations des résultats techniques obtenus. Comme autre conseil, nous suggérerons de soigner la présentation (il y avait de véritables torchons) et d'essayer de garder un minimum de cohérence et de logique. On peut toujours se tromper, mais il n'est quand même pas normal de trouver des contradictions comme : $\sqrt[n]{n!}$ est équivalent à 1 et quelques lignes plus loin qu'il tend vers l'infini, ou que $\sqrt[n]{n!}$ est équivalent à n, puis qu'il tend vers 0 ou vers 1.....

Le souci de la rigueur logique de ce que l'on écrit pourrait être un bon début pour des progrès en mathématiques en particulier et en sciences en général.