ALGÈBRE

Rapporteur Monsieur Karim ZAYANA

Le sujet d'algèbre de cette année présentait la méthode des traces, algorithme de calcul itératif du polynôme caractéristique d'une matrice. Son principe, exposé en partie **I**, débouchait sur un programme informatique (partie **II**), lui-même suivi de quelques applications (partie **III**).

Quelques questions calculatoires (**I.6**, **I.7**, **III.2**, **III.3.b/**) demandaient un soin particulier. D'autres, plus ouvertes (**I.8** et **II.4.d/**), bon sens et réflexion. D'autres, enfin, (**II.3**, **II.4**), jugeaient le degré de familiarité des élèves avec l'outil informatique. Au-delà des connaissances exigibles, toutes ces qualités font partie intégrante des objectifs des programmes. Elles présagent de la réussite future d'un élève en école d'ingénieur. Il est donc naturel de les contrôler.

Les candidats ont bien réagi au problème, dont la progression et la rédaction (parfois proches du cours) les ont mis en confiance. Plusieurs d'entre eux traitent parfaitement la partie d'informatique, ce qui atteste du sérieux de leur préparation. Un nombre significatif de copies obtient la note maximale.
Passons maintenant en revue quelques points techniques :

I. La méthode des traces

1 a/ Des erreurs de signe.

b/ Certains, qui ne citent pas le théorème de d'Alembert – Gauss, évoquent la trigonalisation d'une matrice sur $\mathbb{C}$. Solution recevable, à condition de rappeler l'invariance du polynôme caractéristique par changement de base.

c/ Après avoir dit qu'il suffisait de développer le polynôme pour en identifier ses monômes de degrés $n-1$ et 0, il fallait ensuite le faire.

2 Par analogie au déterminant, certains pensent à tort que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{p}}) = (\mathrm{tr}(\mathrm{A}))^{\mathrm{p}}$.

3 Le détour par $\ln|\chi_{\mathrm{A}}(\lambda)|$ était ingénieux, mais réservé au cas réel.

4 Un amalgame entre développement en série entière et développement limité. Le minorant fourni est souvent très approximatif, avec un min plutôt qu'un max, et parfois sans aucun module.

5 L'interversion des deux sommes relevait ici des opérations générales sur les séries, à mentionner.

6 Le cas $\lambda = 0$ est rarement traité. Par ailleurs, la quantité $\frac{1}{\max\left(|\lambda_k|\right)}$ a pu se transformer en $\max\left(\frac{1}{|\lambda_j|}\right)$ dans quelques copies.

7 La trace de I_n vaut *n*, pas 1.

8 C'est une réponse consensuelle, valable à condition que le polynôme caractéristique de *A* soit scindé sur $\mathbb{R}$, qui est le plus souvent avancée.

II. Mise en place de l'algorithme

1 Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ comporte n^2 coefficients, pas n^n.

3 a/ Les affectations sont parfois codées à contresens, en écrivant $\mathrm{tr}\left(A^k\right) \leftarrow t[k]$ plutôt que $t[k] \leftarrow \mathrm{tr}\left(A^k\right)$.

3 b/ Plusieurs candidats comprennent l'intérêt d'un calcul progressif des puissances de A, savent imbriquer deux boucles, et évaluent bien la complexité de l'algorithme. Cela est révélateur des progrès réalisés en informatique par les élèves de TSI depuis la réforme de 1995.

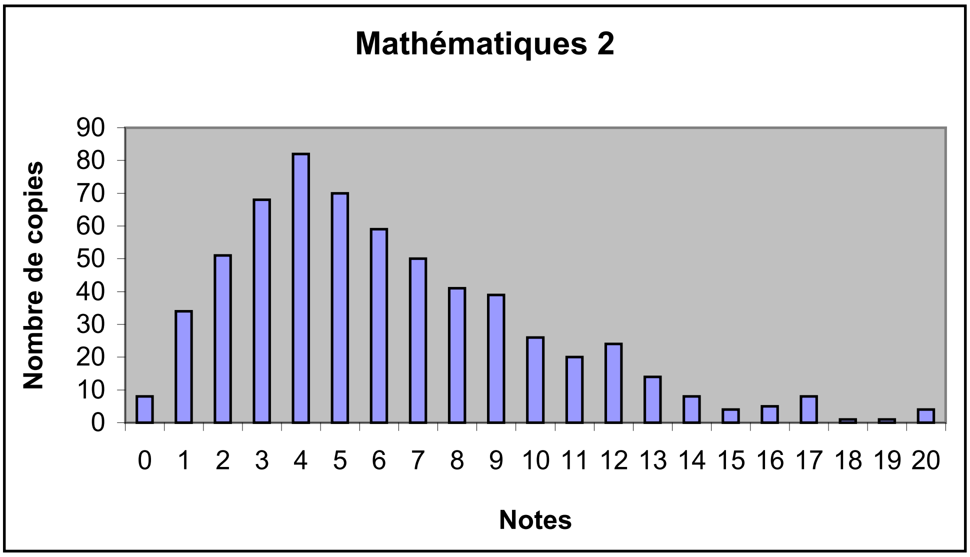
III. Trois exemples et une application

1 a/ Beaucoup de maladresses sur cette question, où l'on a pu lire pêle-mêle : $\mathrm{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\right\}$ et $\mathrm{Im(f)} = \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}\right)$, plutôt que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\right)$; $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^{n-1}$ plutôt que $\mathrm{Im}(f) \simeq \mathbb{R}^{n-1}$, $\ker(f) = \left\{\overrightarrow{e_1}\right\}$ plutôt que $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}\right)$. Enfin, un nombre insuffisant de candidats perçoivent qu'une application linéaire est entièrement définie par la donnée de l'image d'une base et quelques uns remplacent la sous-diagonale de 1 par une sur-diagonale.

1 b/ La méthode de Sarrus de développement d'un déterminant ne s'applique qu'aux matrices 3 X 3.

2 Encore des maladresses ! Le noyau de la matrice, qui est ici nul, est parfois signalé comme vide.

4 a/ Emportés dans leur élan, plusieurs candidats annulent a_0 après avoir examiné $a1, a2, \ldots\ldots, an$ et trouvent ainsi un polynôme caractéristique nul.


Mathématiques 2
Nombre de copies
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Notes