Mathématiques 2

Monsieur DE SAINT JULIEN Arnaud

Le sujet traitait de racines carrées de matrices. Il était constitué de trois parties que l'on pouvait traiter de manière indépendante, même s'il valait mieux faire les questions dans l'ordre, afin de garder en tête le fil conducteur du problème.

Le problème était bien construit, détaillé et progressif, il n'a posé aucun problème de compréhension aux candidats. Il n'était ni difficile, ni long. Une quantité non négligeable d'étudiants a traité toutes les questions.

Les thèmes mis en jeu étaient des fondamentaux du programme :
- algèbre linéaire (calcul matriciel, réduction…),
- algèbre bilinéaire (théorème spectral, matrice définie positive…),
- topologie (parties fermées, bornées, intérieurs…),
- polynômes à une et plusieurs indéterminées.

Appréciation générale des copies

Les résultats des candidats sont extrêmement contrastés. On a constaté un nombre élevé de très bonnes copies mais aussi, une quantité importante de très mauvaises, loin du niveau attendu pour des élèves de filière MP.
Cette hétérogénéité se retrouve aussi dans le soin et la qualité de rédaction apportés aux copies.

Des erreurs de **logique** ont été fréquemment rencontrées. Les candidats ne doivent pas confondre « si » et « si et seulement si ». De nombreuses réciproques ont été oubliées.

Le **calcul** n'est plus très bien maîtrisé, même par de bons candidats.

Globalement, le cours est bien connu.

La moyenne de l'épreuve est élevée, elle est de 10,11.
L'écart type vaut 4,21 ; lui aussi est important.

Ce sujet a très bien joué son rôle pour les concours communs polytechniques : il a permis de bien classer les candidats.

Remarques détaillées par question

Partie I

Exemple 1

1. La justification « diagonalisable car polynôme caractéristique scindé à racines simples » est évidemment suffisante.

2. a. Question simple, bien traitée dans l'ensemble malgré quelques réponses farfelues.

b. Pas mal d'erreurs. La plus importante est : « une matrice qui commute avec une matrice diagonale est diagonale », ce qui bien sûr est faux puisque toute matrice commute avec l'identité et que la plupart des matrices ne sont pas diagonales !
Certains ont dit que les sous espaces propres de D étaient stables par S, sans préciser qu'ils étaient de dimension 1, ce qui permettait effectivement de conclure.

c. Facile et bien traitée.

d. Certains ont répondu que $Rac(A) \subset M_n(\mathbb{C})$, sans conclure à l'absurdité.

e. Beaucoup ont oublié la réciproque.

3. Pas mal d'erreurs de dénombrement dans le nombre de racines carrées. De plus, la grande majorité des candidats n'a pas réalisé que 0 ne pouvait être (si elle l'était) que valeur propre simple.

4. La question calculatoire du problème n'a pas été traitée ou mal traitée par beaucoup de candidats y compris les bons !

Exemple 2

5. a. Assez bien traitée

b. De nombreuses erreurs. Voici les plus graves :
- la réunion de 2 familles libres est encore une famille libre
- $\operatorname{Im} f$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$.

6. a. Question assez mal traitée avec des réponses souvent non justifiées. La réciproque est très souvent oubliée.
La matrice nulle est parfois oubliée. Les candidats n'ont pas forcément réalisé que cette fois-ci (contrairement au premier exemple), la matrice de passage n'était pas fixée mais décrivait tout $GL_n(\mathbb{R})$. $Rac(0)$ est donc la réunion de plusieurs classes de similitudes non bornées (à part celle de la matrice nulle).

b. L'exemple numérique a été bien traité par ceux qui avaient réussi la question précédente.

Exemple 3

7. a. Réussie par quasiment tous les candidats.

b. Question peu réussie, où il suffisait de remarquer que $X^2 - 1$ était un polynôme annulateur scindé à racines simples.

8. Oubli fréquent de la réciproque. Assez souvent, les candidats à défaut de le montrer, ont deviné la réponse.

Exemple 4

9. Question très rarement bien traitée. Très souvent, on a eu des réponses fausses du type : « une matrice qui admet une valeur propre strictement négative n'admet pas de racine carrée ». Il fallait absolument préciser à spectre simple, sinon c'est faux.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I_2$, ce qui prouve qu'une matrice à spectre négatif peut admettre des racines carrées (ici la racine carrée est une matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$).

10. La plupart des candidats savent qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable. Le fait que ce soit en base orthonormale est rarement utilisé pour prouver la symétrie des racines carrées.

Partie II

11. Des fortunes assez diverses à cette question. Il fallait absolument évoquer la continuité de $M \mapsto M^2$. Certains pensent bien à l'image réciproque, d'autres ont utilisé la caractérisation séquentielle.

12.a. Pas de problème pour le petit calcul. En revanche, beaucoup ont dit que $Rac(I_2)$ était non borné car infini ! C'est une horreur !

b. Certains ne traitent ici que le cas $n = 3$. D'autres exhibent bien une suite de racines carrées de la matrice unité pour *n* quelconque, mais ont des problèmes avec le caractère borné.

c. On trouve ici parfois d'excellentes justifications. Les candidats pensent souvent à l'équivalence des normes en dimension finie. La plupart pensent à utiliser la question précédente. Une erreur fréquente était d'écrire que N était surmultiplicative ou que $\|I_n\| = 1$, confondant ainsi N et $\| \ \|$.

Partie III

13.a. Question très simple qui, pourtant, a posé des problèmes avec un grand nombre de réponses farfelues!

b. Question pas toujours abordée qui lorsqu'elle était traitée, était assez bien réussie.

14.a. Question très simple qui a confirmé que beaucoup de candidats ne sont pas vigilants aux « si et seulement si ». Il fallait au moins dire qu'un polynôme non nul n'avait qu'un nombre fini de racines.

b. Beaucoup de bonnes réponses, malgré de rares erreurs dans les graphiques.

15.a. C'est la question la plus délicate du problème. Rares ont été les réponses correctement rédigées pour l'hérédité. Le passage de $p+1$ variables à p variables demandait beaucoup de soins, notamment pour expliciter les coefficients du nouveau polynôme.

b. Les étudiants savent qu'ils doivent utiliser ici les questions 13.a et 15.a, mais ne l'expriment pas toujours bien.

c. Assez souvent réussie.

16.a. Un certain nombre de candidats n'ont pas vraiment compris ce qu'il fallait faire et écrivent l'ensemble $Rac(A)$ sans faire intervenir les coefficients des matrices. Dans certaines copies plus détaillées, on découvre avec étonnement que le coefficient (i, j) de la matrice M^2 serait $m_{i,j}^2$ au lieu de $\sum_k m_{i,k} m_{k,j}$.

Enfin, beaucoup n'écrivent pas explicitement les polynômes, et on ne discerne pas vraiment quelles en sont les variables.

b. Les candidats bien plongés dans la partie ont souvent donné la bonne réponse. Il fallait tout de même justifier la non nullité des polynômes.

Résumé des erreurs les plus importantes

- Une matrice qui commute avec une matrice diagonale n'est pas forcément diagonale, ni même diagonalisable !
  En effet, toute matrice commute avec l'identité, pourtant la plupart des matrices ne sont pas diagonales et il existe des matrices non diagonalisables!
- La réunion de 2 familles libres n'est pas forcément une famille libre !
  Par exemple, dans $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{F}_1 = \{1, X\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{1 + X\}$ sont deux familles libres mais leur réunion $\{1, X, 1 + X\}$ n'est évidemment pas une famille libre.
- $\operatorname{Im} f$ n'est pas forcément un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$, ne pas confondre avec le théorème du rang qui relie uniquement les *dimensions* de l'image et du noyau. En fait, si E est de dimension finie, on a l'équivalence suivante :
  $\left(E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f\right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2\right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2\right)$.
- Une partie infinie d'un espace vectoriel normé peut être une partie bornée !
  Quelques exemples pour illustrer. Le segment $[0,1]$ est une partie infinie de $\mathbb{R}$, mais elle est bornée. De même, il existe une infinité de matrices orthogonales, pourtant $O_n(\mathbb{R})$ est bornée (utiliser, par exemple, la norme euclidienne $A \mapsto \sqrt{\operatorname{Tr}\left({}^t\!AA\right)}$).