MATHEMATIQUES 2

Rapporteur Monsieur Karim ZAYANA

Partant d'un problème classique de l'algèbre linéaire, ce sujet en explorait ensuite quelques applications : en géométrie tout d'abord, puis en algèbre générale, et enfin, en analyse. Tout était mis en œuvre pour que les candidats s'expriment pleinement et mettent en valeur leurs qualités. Ce qu'ils ont fait, même si quelques maladresses subsistent.

Partie I

1. Le calcul du polynôme caractéristique χ_F est presque toujours correct. Mais il ne suffit pas que ce dernier soit scindé pour que F soit diagonalisable. Il suffit en revanche qu'il soit scindé à racines simples, ce qui économise par ailleurs la recherche des espaces propres.

2. a/ • La plupart des candidats combinent deux éléments de $\mathtt{A}$ - hélas parfois deux fois le même ou avec le même scalaire - pour établir la structure d'espace vectoriel. Peu identifient d'entrée un sous-espace engendré.

• Des confusions entre la dimension de $\mathtt{A}$ et le rang d'une matrice de $\mathtt{A}$, qui n'était du reste pas demandé.

b/ Beaucoup privilégient le calcul direct. On pouvait aussi rapporter les éléments de $\mathtt{A}$ à leur base canonique .(I,F,F^2). puis constater les simplifications de F^3 en I et de F^4 en F.

3. Il suffisait de codiagonaliser $F=PDP^{-1}$, $F^2=PD^2P^{-1}$ et $I=PIP^{-1}$.

4. Cette question découlait de la précédente de façon à éviter un calcul … que la plupart des candidats ont finalement fait !

5.a/ • L'identité $\Phi(0)=0$ n'est pas la cause de la linéarité de Φ, mais en est une conséquence.

• Il convenait de justifier l'espace d'arrivée de Φ en invoquant la stabilité de $\mathtt{A}$ par le produit matriciel.

b/ • Φ est un endomorphisme en dimension finie. Pour établir sa bijectivité, il suffisait d'en prouver l'injectivité, la surjectivité ne pouvant ici pas se montrer autrement.

• L'injectivité ne s'obtient pas en recherchant l'image de 0, mais en recherchant ses antécédents.

c/ Il ne suffit pas de faire afficher A^{-1} à sa calculette ou son ordinateur. Encore faut-il s'assurer que la matrice renvoyée se décompose sur .(I,F,F^2).

Partie II

1. Question bien traitée.

2. • Quelques tentatives. Des candidats remarquent par exemple l'appartenance à $\boldsymbol{S}$ du symétrique orthogonal de M par rapport à l'axe Δ. Mais peu de démonstrations complètes.

• Certains candidats ont reconnu en q une forme quadratique dont ils amorcent la réduction souvent sans succès ni perspectives.

3. a/ Question technique, souvent bien traitée par ceux qui l'ont abordée.

b/ Beaucoup de dessins, parfois remarquables de réalisme.

4. a/ Question bien traitée.
b/ Beaucoup oublient de calculer det(A^{-1}) pour justifier l'appartenance de M' à $\boldsymbol{S}$.
c/ Même si tous les ingrédients étaient réunis pour résoudre cette question d'algèbre générale, peu s'y sont essayés.

5. a/ Quelques candidats font figurer sur un dessin le cercle $\boldsymbol{C}$ en tant que parallèle de la surface de révolution $\boldsymbol{S}$. Mais très peu de calculs du rayon de ce cercle.

Partie III

1. Question difficile, qui n'a pas été bien traitée.
- Certains tentent une recherche de points critiques. Des difficultés à dériver les radicaux et le libellé des questions suivantes auraient pourtant dû les en dissuader.
- Très peu perçoivent l'intérêt d'avoir calculé $\varphi(0)$ pour localiser les antécédents éventuels du minimum.
- Le théorème de l'image continue d'un fermé borné, à appliquer sur la boule fermée centrée en O et de rayon 3, n'est qu'exceptionnellement cité.

2. De trop rares candidats ont soigné l'étude locale de ϕ et en ont tiré les bonnes conclusions.

3. Cette question, heureusement isolée et en toute fin de problème, a été très diversement appréciée par les candidats. Les exigences en matière de géométrie euclidienne affine, pour l'heure résumées en un court paragraphe, gagneront à être davantage explicitées dans les nouveaux programmes de spéciale TSI.

4. On pouvait revenir aux propriétés d'une isométrie affine ou plus simplement privilégier le calcul direct : ce que plusieurs candidats ont fait.

5. a/ Le lien entre cette question et les espaces propres de la rotation vectorielle $\vec{r}$ est souvent deviné, mais pas rigoureusement posé.
b/ Question difficile, qui combinait la formule barycentrique de Leibniz et l'inégalité triangulaire. Quelques bonnes réponses.
c/ Question difficile, manipulant la condition d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Quelques bonnes réponses.

6. L'étude de ϕ est souvent très sommaire, faute de temps probablement.

MOYENNE	**6,39**
ECART TYPE	**3,13**
NOTE MAX	**20**
NOTE MIN	**0**