L'épreuve portait sur une étude de la solution φ_μ (notée φ) du problème de Cauchy.

$$\varphi'' + \varphi = \mu \quad ; \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0$$

où μ désignait une fonction continue 2π - périodique sur **R**. Dans la partie I, on étudiait le caractère 2π - périodique de φ , et on obtenait une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients de Fourier $a_1(\mu)$ et $b_1(\mu)$.

Dans les parties II et III, on étudiait un exemple explicite $(\mu(t) = |\sin t|)$; on calculait l'intégrale $\int_{R+} e^{-t}\varphi(t)\,dt$ dans la partie II et on déterminait la série de Fourier de φ dans la partie III. Enfin dans la question **III.5**, on montrait que la solution ϕ du problème de Cauchy :

$$\phi'' + \phi = \varphi \quad ; \quad \phi(0) = \phi'(0) = 0$$

n'était ni périodique, ni bornée (mais que la fonction $t \mapsto e^{-t}\phi(t)$ restait intégrable sur **R**+)

PARTIE 1

Dés la première question, on note une confusion dans les esprits :

- $\int_0^x \mu(t)\cos t\ dt$ est traitée comme une intégrale à paramètre ;
- on lit souvent $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \mu(t)\cos t\ dt\right) = \mu(t)\cos x - \mu(0)\cos 0$;

l'affirmation « continue donc dérivable » n'est pas exceptionnelle.

Dans la question **I.4.4**, le caractère nécessaire et suffisant est souvent étudié dans un seul sens.
Les candidats éprouvent beaucoup de difficultés pour prouver qu'une fonction est non bornée (question **I.4.6**); on lit beaucoup d'affirmations fausses :

- le produit d'une fonction bornée et d'une fonction non bornée sur l'intervalle I est une fonction non bornée sur I.

- $|\varphi(x)| \leq |x| \Rightarrow \varphi$ non bornée.

PRATIE 2

Cette partie était volontairement abordable et elle est plutôt bien traitée, la valeur obtenue pour $\int_{R_+} e^{-t}\varphi(t)\,dt$ étant exacte mais avec une justification de l'intégration par partie souvent absente.

On peut simplement regretter le peu d'aisance avec les sommes géométriques, ce qui conduit parfois à un résultat du type $\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_n = S$ avec $\gamma_n > 0$ et $S < 0$ sans le moindre commentaire.

PARTIE 3

Si la question **III.1.**1 est traitée correctement, curieusement, il y a souvent un blocage sur la question **III.1.2** qui utilise pourtant le même argument, sans doute en raison d'un flou des connaissances sur le théorème de Dirichlet.

En ce qui concerne les séries de Fourier de μ et de φ les candidats n'éprouvent pas trop de difficultés de calcul (jusqu'à la question **III.3.3**), mais nous déplorons encore une fois les justifications "légères" ou absentes et une formule de Parseval très incertaine.

Seuls quelques bons candidats ont abordés correctement la question **III.3.4** et trouvés la valeurs de $a_1(\varphi)$; de même les calculs intervenant dans la question **III.4** ne sont jamais justifiés correctement.

Enfin, les candidats abordant la question **III.5** se contentent d'affirmer que ϕ est 2π-périodique donc bornée et cela même parmi ceux qui ont trouvé que $a_1(\varphi)$ était non nul.